EXERCICE 1 — 7 points (Nouvelle Calédonie mars 2007)

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Question de cours :
   Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\,(a, b, c)$ et un point $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$.
2. On considère les points A(1 ; 2 ; –3), B(–3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; –1).
   a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
   b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.
   c. Soit I le point de coordonnées (–5 ; 9 ; 4). Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).
   d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC).
   e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).
   f. Le plan P a pour équation cartésienne $x + 2y - 2z - 4 = 0$. Déterminer la position relative des plans P et (ABC).

EXERCICE 2 — 4 points (Nouvelle Calédonie mars 2007)

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ b. $\dfrac{9}{8}$ c. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ d. $\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0 b. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ c. $\dfrac{23}{128}$ d. $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] lorsque

a. $m = -1$ b. $m = \dfrac{1}{2}$ c. $m = e^{\frac{1}{2}}$ d. $m = e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0, 2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est

a. $1 - \dfrac{1}{e}$ b. $\dfrac{1}{e}$ c. $\dfrac{1}{5e}$ d. $\dfrac{1}{0{,}2}(e-1)$

EXERCICE 3 **9 points** (Nouvelle Calédonie mars 2007)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{n}$.

b. Vérifier que $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} - f(n)$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant f(n) \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) \leqslant S_n.$$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

c. En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n).$$

e. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $f(n) + f(n+1) + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$.

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).