CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLE N° 8 TERMINALE S 4

EXERCICE 1 : 1. Question de cours : L'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}$ (a, b, c) et un point M_0 (x_0, y_0, z_0): Pour tout point $M(x ; y; z)$ du plan P contenant M_0 et orthogonal à $\vec{n}$, $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul : $(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$ et en développant l'expression, on obtient $ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$; il suffit de poser : $d = - ax_0 - by_0 - cz_0$.

2. On considère les points A(1 ; 2 ; –3), B(–3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; –1).

a. Les points A, B et C déterminent un plan si et seulement si les points A, B et C ne sont pas alignés, c'est-à-dire si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On a $\overrightarrow{AB}$ (– 4 ; – 1 ; 7) et $\overrightarrow{AC}$ (1 ; 4 ; 2). Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, il n'existe pas de réel non nul k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$. Donc les points A, B et C déterminent un plan.

b. Pour vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$, il suffit de vérifier que les coordonnées des trois points A, B et C vérifient l'équation $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées (–5 ; 9 ; 4). La droite D perpendiculaire au plan (ABC) admet le vecteur $\vec{n}$ (2; – 1; 1) comme vecteur directeur. D'où un système d'équations paramétriques de la droite D est : $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 9 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

d. Pour déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC), on remplace les expressions de x, y et z en fonction de t dans l'équation du plan (ABC): $2(- 5 + 2t) - (9 - t) + 4 + t + 3 = 0$; on trouve $6t - 12 = 0$, soit $t = 2$. Ainsi, $x = - 1$, $y = 7$, $z = 6$. J(– 1; 7; 6).

e. Comme la droite D est perpendiculaire au plan (ABC), la distance du point I au plan (ABC) est égale à
$IJ = \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2 + (z_J - z_I)^2} = \sqrt{(-1+5)^2 + (7-9)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

f. Un vecteur normal à P est $\vec{n}\,'$ (1; 2; – 2). Les vecteurs $\vec{n}$ (2; – 1; 1) et $\vec{n}\,'$ (1; 2; – 2) ne sont pas colinéaires, donc les plans P et (ABC) sont sécants. Ils ne sont pas perpendiculaires, puisque les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ ne sont pas orthogonaux.

EXERCICE 2 (Nouvelle Calédonie mars 2007)

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : Le tirage étant avec remise, on utilise les p-listes (ici, 3-listes). Il y a 4 boules noires sur les 8 boules de l'urne. Donc la probabilité de tirer trois boules noires est : c. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est égale à

$$p_{\text{(obtenir 3 boules de même couleur)}}\text{(obtenir 3 boules rouges)} = \frac{p(\text{obtenir 3 boules rouges})}{p(\text{obtenir 3 boules de même couleur})} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{\left(\frac{4}{8}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^3} : \text{c. } \frac{23}{128}$$

B. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] lorsque $\int_0^1 (x+m)\,dx = 1$,

soit $\left[\frac{x^2}{2} + mx\right]_0^1 = \frac{1}{2} + m = 1$, soit la réponse : b. $m = \frac{1}{2}$.

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0, 2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est égale à $e^{-\lambda \times 5}$ où λ est le paramètre de la loi. Donc cette probabilité est égale à $e^{-0,2 \times 5} = e^{-1}$, donc réponse: b. $\frac{1}{e}$.

EXERCICE 3 (Nouvelle Calédonie mars 2007)

PARTIE A: 1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{k=2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{n(2n+2)+n(2n+1)-(2n+1)(2n+2)}{n(2n+2)(2n+1)} = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $n > 0$, $2n + 1 > 0$, $2n + 2 > 0$, et $-3n - 2 < 0$, donc $\frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)} < 0$; ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$, soit $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} > 0$, puisque somme de termes strictement positifs. Ainsi, la suite (u_n) est minorée par 0 et strictement décroissante, donc elle est convergente.

PARTIE B : a. Pour tout entier naturel n non nul, et $n \leqslant x \leqslant n + 1$, on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$. Par les propriétés sur l'intégrale, on a $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$ d'où l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{n}$.

b. $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \left[\ln x\right]_n^{n+1} = \ln(n + 1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - f(n)$.

c. En utilisant l'encadrement de la question B. a, on obtient $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} - f(n) \leqslant \frac{1}{n}$;

ainsi $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leqslant -f(n) \leqslant 0$, et donc, en multipliant par -1, $0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, soit $0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. Pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$, et en faisant la somme des termes de n à $2n$, on obtient

$$0 \leqslant f(n) + f(n + 1) + f(2n) \leqslant S_n.$$

b. Pour tout réel x distinct de -1 et de 0, $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$.

Par identification, $a + b = 0$ et $a = 1$. Donc $a = 1$ et $b = -1$. Soit $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

c. Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

d. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$; donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$; en utilisant la question B.a, et par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = 0$.

e. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n}^{k=2n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = u_n + \ln n - \ln(2n + 1) = u_n + \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) = u_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = u_n - \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$.

f. $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(2+\frac{1}{n}\right) = \ln 2$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n - \ln\left(2+\frac{1}{n}\right) = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.