EXERCICE 4 **La Réunion 2006** **4 points**

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, **parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses**. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur 1 point. Toute réponse juste rapporte 0,5 point. Donner plus de 2 réponses à une question entraîne la nullité de la question.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z = 0$.
   a. La distance du point O au plan P est égale à 1.
   b. La distance du point O au plan P est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$.
   c. Le vecteur $\vec{n}\left(1 ; \dfrac{3}{2} ; 2\right)$ est un vecteur normal au plan P .
   d. Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P .

2. On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point A(1 ; 1 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; – 4 ; – 2).
   a. La droite D est parallèle au plan P .
   b. La droite D est orthogonale au plan P .
   c. La droite D est sécante avec le plan P .
   d. Un système d'équations paramétriques de D est $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-4t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$

3. On désigne par E l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$.
   Soit le point A(1 ; 1 ; 1).
   a. L'ensemble E contient un seul point, le point A.
   b. L'ensemble E est une droite passant par A.
   c. L'ensemble E est un plan passant par A.
   d. L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ; –3 ; 2).

4. ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).
   a. Le plan P contient toujours le point D.
   b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.
   c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
   d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

EXERCICE 3 La Réunion 2006 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$. L'unité graphique est 2cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\dfrac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\dfrac{z-4}{z} = i$. Écrire la solution sous forme algébrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :
 $a = 2$, $b = 4$, $a' = 2i$ et $d = 2 + 2i$. Quelle est la nature du triangle ODB ? Justifier.
4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - i\sqrt{3}$ et $f = 1 + i\sqrt{3}$.
 Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ? Justifier.
5. Soit C le cercle de centre A et de rayon 2. Soit C' le cercle de centre A' et de rayon 2.
 Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
 a. On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.
 b. Démontrer que le point E' est un point du cercle C'.
 c. Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.
6. Soit D' l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE'D' est rectangle.

EXERCICE 3 Polynésie septembre 2006 7 points

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)\,e^{-x}$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

d. Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \dfrac{1}{e}$. Déterminer I_2 et I_3.

c. Soit A l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Calculer A.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction v sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (où $0 < a < b$).

Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{b}\right]$.

b. On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]0\ ;+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

c. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

EXERCICE 3 Amérique du Sud 2006 4 points

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.
On définit les évènements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?

b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?

c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles

a. Montrer que : $P_B(J_n) = \binom{50}{n} 2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé.

Établir que $p_n = \dfrac{3^{50-n}}{3^{50-n}+2^{50}}$.

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0,9$? Comment peut-on interpréter ce résultat ?