CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLE N° 9 TERMINALE S 4

EXERCICE 1 La Réunion 2006 4 points

1. a. On a d(O ; P) = $\dfrac{|-1|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{29}}$. Faux.

b. Vrai.

c. Vrai : le vecteur 2 $\vec{n}$ (2 ; 3 ; 4) est un vecteur normal au plan.

d. Le vecteur $\vec{p}$ (–5 ; 2 ; 1) est un vecteur normal au plan Q. Et 2 $\vec{n} \cdot \vec{p}$ = – 10 + 6 + 4 = 0. Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans ne sont pas parallèles mais perpendiculaires. Faux

2. a. P admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; –1) et $\vec{n} \cdot \vec{u}$ = 2 – 4 + 2 = 0. Ces vecteurs sont orthogonaux donc la droite est bien parallèle au plan. Vrai

b. Faux car $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

c. On sait que D est parallèle au plan. A ∈ P ⟺ 2 + 1 – 1 = 0 est une égalité fausse, donc la droite D n'est pas incluse dans le plan. Faux

d. Le système proposé est bien la traduction de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$. Vrai

3. a. Les deux plans ont pour vecteurs respectifs normaux $\vec{v}$ (1 ; 1 ; 1) et $\vec{w}$ (1 ; 0 ; –1) et $\vec{v} \,.\, \vec{w}$ = 1 – 1 = 0. Les deux plans sont orthogonaux, leur intersection est donc une droite. Faux

b. On a effectivement 1 + 1 + 1 = 3 et 2 – 1 = 1, donc l'ensemble E est bien une droite contenant A. Vrai

c. Faux

d. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=3 \\ z=2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=3-x-(2x-1) \\ z=2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-3x+4 \\ z=2x-1 \end{cases}$

L'ensemble des points de E est donc l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;-3x+4\,;2x-1)$. La représentation paramétrique de cette droite est donc : $\begin{cases} x=t \\ y=-3t+4 \\ z=2t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Cette équation est celle de la droite contenant B(0 ; 4 ; – 1) et de vecteur directeur (1 ; –3 ; 2). Vrai

4. a. Faux (difficile à justifier)

b. (AH) est orthogonale à (BC) donc appartient aussi au plan P . Vrai

c. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \iff \cdot\ \overrightarrow{BC} .(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) = 0 \iff \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

L'ensemble des points M est donc le plan contenant A et orthogonal à (BC) : c'est bien le plan P . Vrai

d. Faux : La face (ABC) étant quelconque la hauteur [AH] n'est pas la médiane relative à [BC].

EXERCICE 2 La Réunion 2006 5 points

1. $\dfrac{z-4}{z} = i \iff z-4 = iz \iff z(1-i) = 4 \iff z = \dfrac{4}{1-i} = \dfrac{4(1+i)}{2} = 2+2i$. S = {2 + 2$i$}

2. $z^2 - 2z + 4 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff (z-1)^2 = -3 \iff (z-1)^2 = 3i^2 \iff z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

$|z_1| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2 = |z_2|$. Soit $\theta = \arg(z_1)$; $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $z_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3. En interprétant l'égalité de la question 1 obtenue avec l'affixe de D (modules et arguments égaux) :

$\dfrac{z-4}{z} = \dfrac{z_D - z_B}{z_D} = \dfrac{z_D - z_B}{z_D - z_O} = i$. Ainsi $\left|\dfrac{z_D - z_B}{z_D - z_O}\right| = |i|$, soit BD = OD , et $arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_D - z_O}\right) = arg(i)$,

soit $(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BD}) = \dfrac{\pi}{2}$. Autrement dit le triangle OBD est isocèle, rectangle en D.

4. On remarque que z_E et z_F sont les solutions de l'équation de la question 2. Le vecteur $\overrightarrow{OE}$ a pour affixe $z_E - z_O = e$ et le vecteur $\overrightarrow{FA}$ a pour affixe $z_A - z_F = 2 - 1 - i\sqrt{3}$ = e. Donc ces vecteurs sont égaux et OEAF est un parallélogramme.

De plus on sait que $|z_E| = |z_F| = 2$, d'où OE = OF. Donc OEAF est un losange.

5. a. Si M(z) a pour image M′ (z') dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors $z' = iz$.

Donc $e' = z_{E'} = i(1 - i\sqrt{3}) = \sqrt{3} + i$.

b. $A'E' = |z_{E'} - z_{A'}| = |\sqrt{3} + i - 2i| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$, donc E′ appartient bien au cercle C ′.

c. On calcule $e' - d = \sqrt{3} + i - 2 - 2i = \sqrt{3} - 2 - i$. Donc $(\sqrt{3} + 2)(e' - d) = (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2 - i) = -1 - i(\sqrt{3} + 2)$.

D'autre part $e - d = 1 - i\sqrt{3} - 2 - 2i = -1 - i(\sqrt{3} + 2)$. Conclusion : $e - d = (3 + 2)(e' - d)$.

Cette égalité s'écrit vectoriellement : $\overrightarrow{DE} = (\sqrt{3} + 2)\,\overrightarrow{DE'} \iff \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DE'}$ sont colinéaires ou encore E appartient à la droite (DE′) ou encore E, E′ et D sont alignés.

6. Dans la rotation, la droite (ED) ou encore d'après la question précédente la droite (EE′) a pour image la droite perpendiculaire (E′D′) : donc le triangle EE′D′ est rectangle en E′ .

EXERCICE 3 Polynésie septembre 2006 7 points

1. a. En écrivant $f(x) = 2x^3 e^{-x} - 4x^2 e^{-x}$ qui ont tous deux pour limite moins l'infini, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

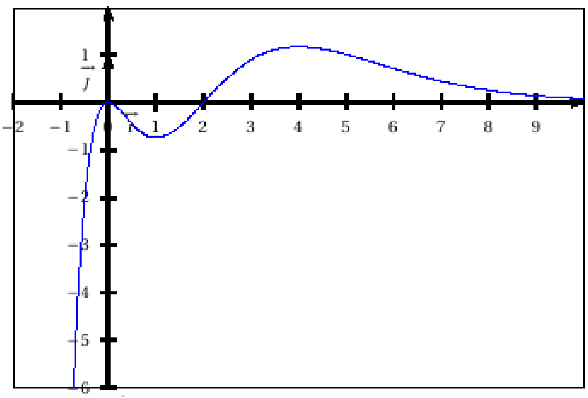
De la même façon en plus l'infini, les deux termes ont pour limite 0, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. La dérivée de la fonction f est donnée par
$f'(x) = e^{-x}(6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2) =$
$e^{-x}(-2x^3 + 10x^2 - 8x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}$.

c. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, le signe de la dérivée est celui de $-x^2 + 5x - 4$. Le trinôme a pour racines 1 et 4, donc le signe de la dérivée dépend de la position de x par rapport aux nombres 0, 1 et 4. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
x		$-$	0	+		+		+	
trinôme		+		+	0	$-$	0	+	
f'		+	0	$-$	0	+	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{2}{e}$	↗	$\frac{64}{e^4}$	↘	0

d. Et la courbe ci-contre.



2. a. Avec $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, soit $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$, on obtient en intégrant par parties, toutes les fonctions étant dérivables, $I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx = -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1 = 1 - 2e^{-1}$.

b. L'égalité, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$

donne pour $n = 2$, $I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e}$.

Et pour $n = 3$, $I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 6 - \frac{16}{e}$.

c. Sur l'intervalle [0; 1], la *fonction f* est négative, donc l'aire du domaine défini est égal (en unités d'aire) à la valeur absolue de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2x^3e^{-x}dx - \int_0^1 4x^2e^{-x}dx = 2I_3 - 4I_2 = 4 - \frac{12}{e}$ (par linéarité de l'intégrale).

Ainsi $A = \frac{12}{e} - 4$ u.a. $= 4\left(\frac{12}{e} - 4\right) \simeq 4{,}4$ cm² .

3. a. u est croissante sur [a ; b] signifie $0 < a < x < b \Rightarrow u(a) < u(x) < u(b) \iff v\left(\frac{1}{a}\right) < v\left(\frac{1}{x}\right) < v\left(\frac{1}{b}\right)$.

Or $0 < a < x < b \iff 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$, puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

On a donc $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} \Rightarrow v\left(\frac{1}{a}\right) < v\left(\frac{1}{x}\right) < v\left(\frac{1}{b}\right)$ ce qui démontre que la fonction v est décroissante sur $\left]\frac{1}{b} ; \frac{1}{a}\right[$.

b. On a donc $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}\right)e^{\frac{-1}{x}}$. En posant $\frac{1}{x} = \alpha$, on obtient $g(\alpha) = (2\alpha^3 - 4\alpha^2)e^{-\alpha}$. On obtient alors facilement $\lim\limits_{\alpha \to 0} g(\alpha) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} g(\alpha) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

c. De même qu'au 2 a, on démontrerait que si u est décroissante, alors v est croissante. Le tableau de variations de g se déduit donc de celui de f après avoir remarqué que si $1 < 4$, alors $\frac{1}{4} < 1$. Les intervalles de variations sont donc $[0\,;\, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}\,;\, 1]$ et $[1\,;\, +\infty[$: d'où le tableau :

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{64}{e^4}$	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	0

EXERCICE 4 Amérique du Sud 2006 4 points

1. a. On a une loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{4}$ et $n = 50$.

b. On a $E = np = 50 \times \frac{1}{4} = 12,5$. (tulipes jaunes)

c. On a $p(X = n) = \binom{50}{n} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} = \binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

d. $p(X = 15) = \binom{50}{15} \times \frac{3^{35}}{4^{50}} \approx 0,089$.

2. a. Si le lot choisi est le 2, on a autant de chances d'avoir une tulipe jaune que le contraire. La loi binomiale a ici pour paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{2}$. La probabilité d'obtenir n tulipes jaunes est donc :

$$p_B(J_n) = \binom{50}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{50-n} = \binom{50}{n} \times \frac{1}{2^{50}}.$$

b. De la même façon que précédemment $p_A(J_n) = \binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$. A et B forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$p(J_n) = p(A \cap J_n) + p(B \cap J_n) = p(A) \times p_A(J_n) + p(B) \times p_B(J_n) = \frac{1}{2} \times \binom{50}{n} \times \frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2} \times \binom{50}{n} \times \frac{1}{2^{50}} =$$

$$\frac{1}{2} \times \binom{50}{n}\left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2^{50}}\right) = \frac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\frac{3^{50-n} + 2^{50}}{4^{50}}\right).$$

c. $$p_n = p_{J_n}(A) = \frac{p(A \cap J_n)}{p(J_n)} = \frac{\frac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\frac{3^{50-n}}{4^{50}}\right)}{\frac{1}{2}\binom{50}{n}\left(\frac{3^{50-n} + 2^{50}}{4^{50}}\right)} = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}.$$

d. $p_n \geqslant 0,9 \iff 3^{50-n} \geqslant 0,9(3^{50-n} + 2^{50}) \iff 0,1 \times 3^{50-n} \geqslant 0,9 \times 2^{50} \iff 3^{50-n} \geqslant 9 \times 2^{50} \iff$

$(50 - n)\ln 3 \geqslant \ln 9 + 50\ln 2 \iff -n\ln 3 \geqslant \ln 9 + 50\ln 2 - 50\ln 3 \iff n \leqslant \frac{\ln 9 + 50\ln 2 - 50\ln 3}{-\ln 3} \iff n \leqslant 16,4$.

Conclusion : il faut que $n < 17$.

Interprétation : Si le nombre de tulipes jaunes est peu élevé (ici moins de 17) la probabilité d'avoir choisi le lot 1 est très grande ; si ce nombre de tulipes jaunes se rapproche de 25 sur 50, la probabilité est grande que le lot choisi soit le lot 2.