

EXERCICE 1

1. Le nombre de réacteurs ayant une panne sur un biréacteur peut être 0, 1 ou 2, donc les valeurs prises par X sont 0, 1, 2. Et $p(X=0) = (1-p)^2$; $p(X=1) = 2p(1-p)$; $p(X=2) = p^2$.

Le nombre de réacteurs ayant une panne sur un quadriréacteur peut être 0, 1, 2, 3 ou 4, donc les valeurs prises par Y sont 0, 1, 2, 3, 4. Et $p(Y=0) = (1-p)^4$; $p(Y=1) = 4p(1-p)^3$; $p(Y=2) = 6p^2(1-p)^2$; $p(Y=3) = 4p^3(1-p)$; $p(Y=4) = p^4$.

2. Un avion peut poursuivre son vol sans escale si au moins la moitié de ses réacteurs fonctionnent.

a) $p_B = p(X=0) + p(X=1) = (1-p)^2 + 2p(1-p) = (1-p)(1-p+2p) = (1-p)(1+p) = 1-p^2$.

Et $p_Q = p(Y=0) + p(Y=1) + p(Y=2) = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2 = (1-p)^2 [(1-p)^2 + 4p(1-p) + 6p^2]$
 $= (1-p)^2 (3p^2 + 2p + 1)$.

b) $p_B - p_Q = 1-p^2 - (1-p)^2 (3p^2 + 2p + 1) = 1-p^2 - (1-2p+p^2)(3p^2 + 2p + 1) = -3p^4 + 4p^3 - p^2 = p^2(-3p^2 + 4p - 1)$.

c) Pour indiquer suivant les valeurs de p quel type d'avion présente la meilleure fiabilité, il faut trouver le signe de $p_B - p_Q = p^2(-3p^2 + 4p - 1)$, qui est du signe de $-3p^2 + 4p - 1$. Le discriminant est égal à $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$; il y

a deux solutions réelles : $p_1 = \frac{-4+2}{-6} = \frac{1}{3}$ et $p_2 = \frac{-4-2}{-6} = 1$.

p	0	$\frac{1}{3}$	1
$p_B - p_Q$	0	-	+

Donc $p_B \leq p_Q$ si $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$ et $p_B \geq p_Q$ si $\frac{1}{3} \leq p \leq 1$.

Ainsi, le biréacteur est plus fiable si $\frac{1}{3} \leq p \leq 1$, et le quadriréacteur est

plus fiable si $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$.

EXERCICE 2 : 1. Le nombre de tirages possibles de deux boules de l'urne est égal à $\binom{10}{2} = 45$.

$$p(V) = \frac{\binom{4}{2}}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}; \quad p(J) = \frac{\binom{6}{2}}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}. \quad p(R) = p(J) + p(V \cap \text{« il tourne la roue et est remboursé de sa$$

$$\text{participation} \text{ »}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12}.$$

2. On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Les valeurs prises par X sont $-m, 0, 20-m, 100-m$.

$$p(X = -m) = p(\text{« tirer deux boules de couleurs différentes »}) = 1 - p(V) - p(J) = \frac{8}{15};$$

$$p(X = 0) = p(R) = \frac{5}{12}; \quad p(X = 20-m) = p(V \cap \text{« il tourne la roue et gagne 20 euros »}) = \frac{2}{15} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30};$$

$$p(X = 100-m) = p(V \cap \text{« il tourne la roue et gagne 100 euros »}) = \frac{2}{15} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{60}.$$

$$b) E(X) = -m \times p(X = -m) + 0 \times p(X = 0) + (20-m) \times p(X = 20-m) + (100-m) \times p(X = 100-m) =$$

$$\frac{-8m}{15} + \frac{20-m}{30} + \frac{100-m}{60} = \frac{140-35m}{60} = \frac{28-7m}{12}.$$

3. La valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent doit vérifier $E(X) \leq 0$,

soit $\frac{28-7m}{12} \leq 0$, soit $28-7m \leq 0$, soit $m \geq 4$. Donc la valeur minimale de m pour que l'organisateur puisse

espérer ne pas perdre d'argent est égale à 4.