CORRIGÉ DEVOIR MAISON n° 1 TERMINALE S

EXERCICE 1 : 1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.

Pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}} = -f(x)$, donc la fonction f est impaire.

2. a) On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Il s'agit d'une forme indéterminée de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour $x > 0$, on factorise par x :

$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Comme la fonction f est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

b) On en déduit que la courbe C représentative de la fonction f admet deux asymptotes horizontales, l'une d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et l'autre d'équation $y = -1$ en $-\infty$.

3. Pour étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, on dérive f qui est de la forme: $\dfrac{u}{v}$, de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$:

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x^2}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$ qui est strictement positif pour tout x réel . Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout réel x, $0 \leqslant x^2$, donc $1 \leqslant x^2 + 1$,

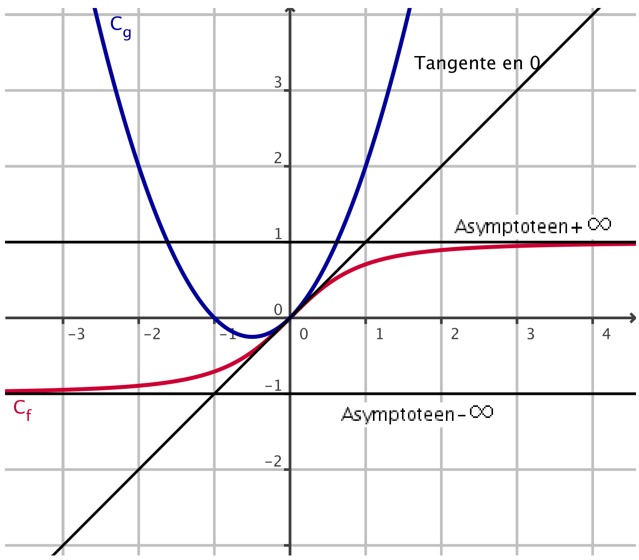
donc $0 < \dfrac{1}{x^2+1} \leqslant 1$, et $0 < f'(x) \leqslant 1$.

5. Si le coefficient directeur de la tangente T à C est égal à 1, alors au point de tangence A(a; $f(a)$) , on a $f'(a) = 1$, soit $\dfrac{1}{a^2+1} = 1$, soit $a^2 + 1 = 1$, soit $a = 0$.

Donc $f(a) = f(0) = 0$, et l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a) = 1(x) + 0$, soit $y = x$.

6. On pose $g(x) = ax^2 + bx + c$. On sait que $g'(x) = 2ax + b$. On veut que $g(0) = 0$, soit $c = 0$ et $g'(0) = 1$, soit $b = 1$. D'où $g(x) = ax^2 + x$.

Toutes les valeurs de a conviennent.



EXERCICE 2

1. a) La droite (AB) est tangente à $\mathscr{P}$ en B, donc le coefficient directeur de cette droite est le nombre dérivé de la fonction carrée en b, soit $2b$. De même, la droite (AB) est tangente à $\mathscr{H}$ en A, donc le coefficient directeur de cette droite est le nombre dérivé de la fonction inverse en a, soit $\dfrac{-1}{a^2}$. Ainsi $2b = \dfrac{-1}{a^2}$.

b) L'équation de la tangente à une courbe représentative d'une fonction f en un point d'abscisse x_0 est de la forme $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$. La droite (AB) est tangente à P au point B d'abscisse b, soit $y = 2b(x-b) + b^2$, soit $y = 2bx - b^2$.

c) Cette tangente passe par A, donc les coordonnées de $A(a;\ \dfrac{1}{a})$ vérifie l'équation de la droite, soit $\dfrac{1}{a} = 2ab - b^2$.

d) On remplace $2b$ par $\dfrac{-1}{a^2}$ et b^2 par $\left(\dfrac{-1}{2a^2}\right)^2$ dans l'équation $\dfrac{1}{a} = 2ab - b^2$, soit $\dfrac{1}{a} = \dfrac{-a}{a^2} - \left(\dfrac{-1}{2a^2}\right)^2$, soit

$\dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{4a^4}$, soit $8a^4 = a$ soit $8a^3 = 1$ soit $a^3 = \dfrac{1}{8}$, d'où $a = \dfrac{1}{2}$; et $b = \dfrac{-1}{2a^2} = -2$.

2. On a déterminé une droite tangente aux deux courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$. L'équation de la question précédente a une unique solution, donc il existe une unique droite tangente aux deux courbes H et P, d'équation $y = -4x - 4$.