

EXERCICE 1

1. On considère, pour tout entier naturel n non nul la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ et la

suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \frac{1}{2}$.

c) Trouver le plus petit entier N tel que, si $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$.

d) En déduire que si $n \geq N$, alors $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.

2. On pose pour tout entier $n \geq 5$: $S_n = u_5 + u_6 + u_7 + \dots + u_n$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 5$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 5$: $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.

c) En déduire que, pour tout entier $n \geq 5$: $S_n \leq 4u_5$.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

EXERCICE 2

1. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Montrer que C admet deux asymptotes que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variations de f .

c) Tracer la courbe C .

2. Soit m un réel et (d) la droite d'équation $y = m$.

Discuter, suivant les valeurs de m du nombre de points d'intersection de C et (d) .

3. Dans la suite, on suppose que $m > \sqrt{2}$, et on appelle A et B les points d'intersection de C et (d) .

a) Montrer que le produit de l'abscisse de A par l'abscisse de B est constant égal à $\frac{3}{2}$.

b) Soit I le milieu de $[AB]$. A l'aide de GeoGebra, conjecturer le lieu du point I lorsque m décrit l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[$. On pourra utiliser la fonction Trace dans Propriétés du point I (clic droit sur I , puis propriétés). Pour le nombre m , on pourra créer un point M sur l'axe des ordonnées, d'ordonnée supérieure à $\sqrt{2}$, et déplacer M sur cet axe pour faire apparaître la trace de I . Rendre la figure avec la copie.