

CORRIGÉ DEVOIR MAISON n° 2 TERMINALE S

EXERCICE 1 : 1. a) On peut écrire $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

b) On a vu que $v_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$. Or pour tout entier naturel $n > 0$, $1 + \frac{1}{n} > 1$, donc $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > 1$ et $v_n > \frac{1}{2}$.

c) On cherche le plus petit entier N tel que, si $n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$. Montrons d'abord que (v_n) est décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1} + 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{n(n+1)}\right) \left(\frac{2n^2 + 4n + 1}{n(n+1)}\right) < 0, \text{ donc } v_{n+1} < v_n \text{ et } (v_n) \text{ est décroissante. On a } v_4 = 0,78 \text{ et } v_5 = 0,72, \text{ donc } N = 5.$$

d) Pour $n \geq N$, on a $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$ donc $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.

2. a) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 5$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$:

Initialisation : pour $n = 5$, $u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 u_5$, donc la propriété est vraie pour $n = 5$.

Hérédité : Supposons que pour une valeur de $n \geq 5$, $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$; alors $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$, donc

$u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$. Ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion: pour tout entier $n \geq 5$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b) $S_n = u_5 + u_6 + u_7 + \dots + u_n \leq u_5 + \left(\frac{3}{4}\right) u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 u_5 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.

c) La suite de terme générale $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$,

donc la somme $\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right]$. Pour tout entier $n \geq 5$, le nombre

$$\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}\right] < 1, \text{ donc } S_n \leq 4u_5.$$

3. On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} > 0$, donc la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante.

Cette suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante et majorée par $4u_5$, donc elle converge.

EXERCICE 2 : 1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}}{2x} = 0$. Ainsi C

admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) et une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

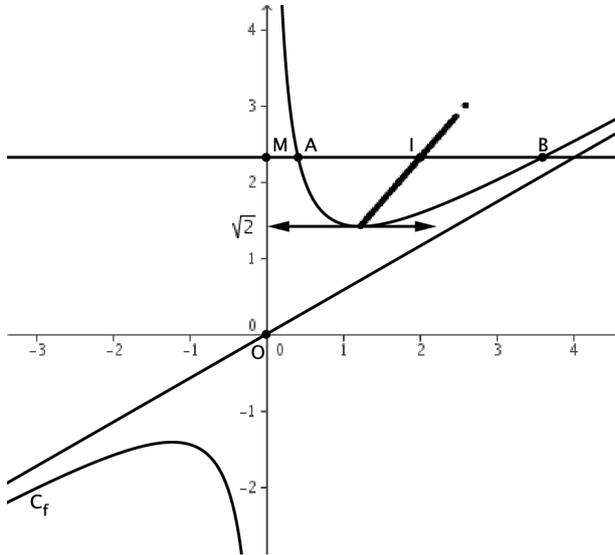
b) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions qui le sont.

Et $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-2\sqrt{3}}{4x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-\sqrt{3}}{2x^2} = \frac{2x^2-3}{2x^2\sqrt{3}}$. Le signe de cette dérivée dépend du numérateur puisque le

dénominateur est strictement positif. $2x^2 - 3$ s'annule en $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le tableau de variations de f :

c) Tracé de la courbe C :



x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

2.

D'après le tableau de variations, si $m < \sqrt{2}$, il n'y a aucun point d'intersection entre C et (d). Si $m = \sqrt{2}$, il y a un point d'intersection de coordonnées $(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{2})$.

Si $m > \sqrt{2}$, il y a deux points d'intersection.

3. Dans la suite, on suppose que $m > \sqrt{2}$, et on appelle A et B les points d'intersection de C et (d).

a) Les abscisses de A et B vérifient l'équation $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x} = m$,

soit $2x^2 - 2xm\sqrt{3} + 3 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 12m^2 - 24 = 12(m^2 - 2)$. Si $m > \sqrt{2}$, $\Delta > 0$, et l'équation a deux solutions

$x_A = \frac{2m\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sqrt{m^2-2}}{4} = \frac{\sqrt{3}(m - \sqrt{m^2-2})}{2}$ et $x_B = \frac{\sqrt{3}(m + \sqrt{m^2-2})}{2}$. Le produit des abscisses de A et B est égal à $\frac{\sqrt{3}(m - \sqrt{m^2-2})}{2} \times \frac{\sqrt{3}(m + \sqrt{m^2-2})}{2} = \frac{3(m^2 - (m^2 - 2))}{4} = \frac{3}{2}$.

b) Soit I le milieu de [AB]. A l'aide de GeoGebra, on conjecture que, lorsque m décrit l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[$, le point I se trouve sur une demi-droite passant par l'origine du repère, donc d'équation $y = ax$. Déterminons a :

L'abscisse de I est égale à $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m\sqrt{3}}{2}$, et son ordonnée est égale à $y_I = y_A = y_B = m$.

Donc $a = \frac{y_I}{x_I} = \frac{m}{\frac{m\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. La demi-droite a pour origine le point S $(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{2})$.