DEVOIR MAISON N° 3 TERMINALE S *Octobre 2007*

EXERCICE 1

On considère, pour tout entier naturel n la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^2+5}{2u_n}$ et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n-\sqrt{5}}{u_n+\sqrt{5}}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = (v_n)^2$.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Montrer l'inégalité $v_0 \leqslant \dfrac{1}{16}$.
4. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE 2

On considère une fonction f définie et 2 fois dérivable sur un intervalle I.
Le but de l'exercice est d'étudier la position de la courbe C représentative de f par rapport à ces tangentes.
1. Soit a un réel de I qui n'est pas une borne de I.
Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse a.
2. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$.
a) Déterminer $g''(x)$.
b) Montrer que, si la fonction f'' est positive sur I, alors la tangente T est au-dessous de C pour tout a de I.
c) Étudier la position de la tangente T par rapport à C lorsque f'' est négative sur I.
Dans le cas de question 2. b) on dit que la fonction f est convexe sur I. Dans le cas de question 2. c) on dit que la fonction f est concave sur I.
3. Soit f la fonction définie sur $[0; \dfrac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
La fonction est-elle convexe ou concave sur $[0; \dfrac{\pi}{2}[$?
4. Soit g la fonction définie sur $[0; \dfrac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \sin(x)$. La fonction est-elle convexe ou concave sur $[0; \dfrac{\pi}{2}[$?
5. Soit h la fonction définie sur $[0; 2]$ par $h(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$.
a) Montrer que la fonction est concave puis convexe sur $[0; 2]$ et préciser la valeur de x en laquelle le changement s'opère.
b) Quelle est la position de la tangente à la courbe représentative de h en ce point ?