CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 4 TERMINALE S 4

EXERCICE 1

1. a) Comme l'abeille mâle n'a qu'une mère, pour chaque ancêtre mâle de la génération n, il y a une femelle de la génération $n + 1$, et pour chaque ancêtre femelle de la génération n, il y a une femelle de la génération $n + 1$, donc $u_n = F_{n+1}$. Chaque mâle de la génération $n + 1$ donne naissance à une femelle de la génération n, donc $M_{n+1} = F_n$.

b) On a $u_{n+1} = M_{n+1} + F_{n+1} = F_n + u_n = u_n + F_n = u_n + u_{n-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$:

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$ et $u_0 = 1 \geqslant 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons pour un n supérieur ou égal à 2 que $u_n \geqslant n$ et $u_{n-1} \geqslant n - 1$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant n + 1$:
$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \geqslant n + n - 1 \geqslant 2n - 1 \geqslant n + 1$ (car $n \geqslant 2$).

Ainsi, $u_{n+1} - u_n = u_{n-1} > 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

Donc pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$. Par un théorème de comparaison de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n > 0$, $(u_n)^2 = u_{n-1}\, u_{n+1} + (-1)^n$:

Initialisation : $(u_1)^2 = 1$ et $u_0\, u_2 + (-1)^1 = 1\times 2 - 1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que pour un n supérieur ou égal à 1, $(u_n)^2 = u_{n-1}\, u_{n+1} + (-1)^n$ et
montrons que $(u_{n+1})^2 = u_n\, u_{n+2} + (-1)^{n+1}$: $(u_{n+1})^2 = (u_{n+1})(u_n + u_{n-1}) = u_{n+1}\, u_n + u_{n+1}\, u_{n-1} =$
$u_n\, u_{n+1} + (u_n)^2 - (-1)^n = (u_n)(u_{n+1} + u_n) + (-1)^{n+1} = u_n\, u_{n+2} + (-1)^{n+1}$.

Donc pour tout entier naturel n, $(u_n)^2 = u_{n-1}\, u_{n+1} + (-1)^n$.

3. a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_{n+2}u_n - (u_{n+1})^2}{u_n u_{n+1}} = \dfrac{(u_{n+1})^2 - (-1)^{n+1} - (u_{n+1})^2}{u_n u_{n+1}} = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$.

b) On a $\dfrac{-1}{u_n u_{n+1}} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)(u_{n+1}) = +\infty$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$.

4. On pose $w_n = v_{2n-1}$ et $t_n = v_{2n}$.

a) On a $w_{n+1} - w_n = v_{2n+1} - v_{2n-1} = v_{2n+1} - v_{2n} + v_{2n} - v_{2n-1} = \dfrac{(-1)^{2n}}{u_{2n+1}u_{2n}} + \dfrac{(-1)^{2n-1}}{u_{2n}u_{2n-1}} = \dfrac{u_{2n-1} - u_{2n+1}}{u_{2n+1}u_{2n}u_{2n-1}}$. On a vu que tous les u_n sont strictement positifs et la suite (u_n) est croissante, donc $u_{2n-1} - u_{2n+1} < 0$, donc $w_{n+1} - w_n < 0$, et la suite (w_n) est décroissante.

De même, $t_{n+1} - t_n = v_{2n+2} - v_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} + v_{2n+1} - v_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{u_{2n+2}u_{2n+1}} - \dfrac{(-1)^{2n}}{u_{2n}u_{2n+1}} = \dfrac{-u_{2n} + u_{2n+2}}{u_{2n+2}u_{2n+1}u_{2n}}$.

Et $u_{2n+2} - u_{2n} > 0$, donc $t_{n+1} - t_n > 0$, et la suite (t_n) est croissante.

b) Pour montrer que les suites (w_n) et (t_n) sont adjacentes, il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (t_n - w_n) = 0$.

Or, $t_n - w_n = v_{2n} - v_{2n-1}$. On a vu que pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = 0$;

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (t_n - w_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (v_{2n} - v_{2n-1}) = 0$. Si les suites (w_n) et (t_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite, soit (v_{2n}) et (v_{2n-1}) convergent vers la même limite, donc la suite (v_n) converge vers une limite L.

c) On a $(v_n)^2 - v_n - 1 = \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{(u_{n+1})^2 - u_n u_{n+1}}{(u_n)^2} - 1 = \dfrac{(u_{n+1})(u_{n+1} - u_n)}{(u_n)^2} - 1 = \dfrac{(u_{n+1})(u_{n-1})}{(u_n)^2} - 1 =$
$\dfrac{(u_n)^2 - (-1)^n}{(u_n)^2} - 1 = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(u_n)^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [(v_n)^2 - v_n - 1] = 0$.

d) La suite (v_n) converge vers L, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)^2 = L^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$, donc $L^2 - L - 1 = 0$.

e) On résout l'équation $L^2 - L - 1 = 0$. Le discriminant $= 5 > 0$, il y a deux solutions $L_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $L_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Tous les termes de la suite (v_n) sont positifs, donc L = L$_1$ = $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est le nombre d'or.

EXERCICE 2

1. On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 2e^{-x} - x^2 + 2x$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2+2x) = -\infty$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

On peut écrire $f(x) = e^{-x}(2 - x^2 e^x + 2x\,e^x)$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} (x e^{\frac{x}{2}})^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} 4(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}})^2 = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (2-x^2e^x+2xe^x) = 2$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) On a $f'(x) = -2e^{-x} - 2x + 2$ puis $f''(x) = 2e^{-x} - 2 = 2(e^{-x} - 1)$.

c) Le signe de f'' est celui de $e^{-x} - 1$: $e^{-x} - 1 \geqslant 0$ équivaut à $e^{-x} \geqslant 1$ équivaut à $-x \geqslant 0$ équivaut *à* $x \leqslant 0$. Donc la fonction f'' est positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc un maximum en 0 égal à $f'(0) = -2e^{-0} - 2\times0 + 2 = 0$.

d) Comme le maximum de f' est 0, la fonction f' est négative sur ℝ. Donc la *fonction f* est strictement décroissante sur ℝ.

2. a) La fonction f est continue puisque dérivable et strictement décroissante de ℝ dans ℝ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur ℝ.

b) Avec la calculatrice, on trouve $\alpha = 2{,}11$ à 10^{-2} près.

3. On considère la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = -x^2 + 2x$ et C' sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

a) Pour étudier la position relative des courbes C et C', on étudie le signe de $f(x) - g(x) = 2e^{-x}$. Or, pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $f(x) - g(x) > 0$, et $f(x) > g(x)$. Ainsi, la courbe C est au-dessus de C' sur ℝ.

b) La distance MP = $\sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = 2e^{-x}$. On résout l'inéquation $2e^{-x} \leqslant 10^{-3}$ équivaut à $e^{-x} \leqslant 5\times10^{-4}$ équivaut à $-x \leqslant \ln(5\times10^{-4})$, dont une valeur approchée est $-7{,}6$, ce qui donne $x \geqslant 7{,}6$. Donc $a = 7{,}6$.

4. Représentation graphique de C, C' et la tangente à C au point d'abscisse 0: