EXERCICE 1

Dans le plan orienté, on considère le quadrilatère convexe ABCD.

On construit les triangles rectangles isocèles PAB, QBC, RCD, SDA tels que :

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = -\frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) = -\frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure (la figure pourra être réalisée avec GeoGebra).

2. On munit le plan d'un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$), et on considère les affixes a, b, c, d, p, q, r, s des points A, B, C, D, P, Q, R, S.

a) Montrer que $p = \frac{1}{2}[a(1+i) + b(1-i)]$.

b) Exprimer de même les nombres complexes q, r, s en fonction de a, b, c, d.

c) Montrer que $p + r = q + s$.

d) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère PQRS ?

EXERCICE 2

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

On considère trois points A, B et C distincts d'affixes respectives a, b, c.

2. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

3. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

4. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$.