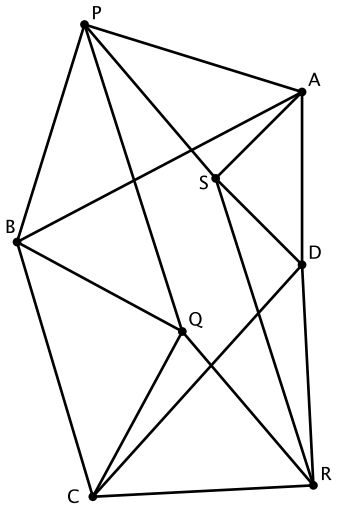
CORRIGÉ DEVOIR MAISON n° 6 TERMINALE S



EXERCICE 1

Dans le plan orienté, on considère le quadrilatère convexe ABCD.

On construit les triangles rectangles isocèles PAB, QBC, RCD, SDA tels que :

$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = -\frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) = -\frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure (la figure pourra être réalisée avec GeoGebra).

2. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, et on considère les affixes a, b, c, d, p, q, r, s des points A, B, C, D, P, Q, R, S.

a) Sachant que $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = -\frac{\pi}{2}$ et PA = PB, alors le point B est l'image de A par la rotation de centre P et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Donc $b - p = e^{-i\frac{\pi}{2}}(a - p) = -i(a - p)$. Ainsi $b - p = -ia + ip$, soit

$p(1 + i) = b + ia$, soit $p = \frac{b+ia}{1+i} = \frac{(b+ia)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{b(1-i)+a(1+i)}{2}$, donc $p = \frac{1}{2}[a(1 + i) + b(1 - i)]$.

b) Sachant que $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2}$ et QB = QC, alors le point C est l'image de B par la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc $c - q = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - q) = i(b - q)$. Ainsi $c - q = ib - iq$, soit $q(1 - i) = c - ib$,

soit $q = \frac{c-ib}{1-i} = \frac{(c-ib)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{c(1+i)+b(1-i)}{2}$, donc $q = \frac{1}{2}[c(1 + i) + b(1 - i)]$.

De même, $r = \frac{1}{2}[c(1 + i) + d(1 - i)]$, et $s = \frac{1}{2}[a(1 + i) + d(1 - i)]$.

c) On a $p + r = \frac{1}{2}[a(1 + i) + b(1 - i)] + \frac{1}{2}[c(1 + i) + d(1 - i)] = \frac{1}{2}[(a + c)(1 + i) + (b + d)(1 - i)]$.

Et $q + s = \frac{1}{2}[c(1 + i) + b(1 - i)] + \frac{1}{2}[a(1 + i) + d(1 - i)] = \frac{1}{2}[(a + c)(1 + i) + (b + d)(1 - i)]$.

Donc $p + r = q + s$.

d) On peut encore écrire $p - q = s - r$. Le nombre complexe $p - q$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{QP}$, et $s - r$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{RS}$. Ainsi $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS}$, donc le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

EXERCICE 2 : On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Donc $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Ainsi $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

2. Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si le point C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$.

3. On a de même, $a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$ et $b - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - c)$.

En multipliant la dernière relation par j, on obtient $j(b - c) = j\,e^{i\frac{\pi}{3}}(a - c) = e^{i\pi}(a - c) = -a + c$,

soit $a + bj - c(1 + j) = 0$, soit $a + bj + cj^2 = 0$ puisque $-(1 + j) = j^2$.

Réciproquement, si $a + bj + cj^2 = 0$, alors $a + bj - c(1 + j) = 0$, alors $b - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - c)$ et ABC est équilatéral.

4. ABC est équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$, $a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$ et $b - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - c)$.

Donc $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = a(a - b) + b(b - c) + c(c - a) =$

$a(e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)) + b(e^{i\frac{\pi}{3}}(a - c)) + c(e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)) = e^{i\frac{\pi}{3}}(ac - ab + ba - bc + cb - ca) = 0.$

Réciproquement, si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$, alors $(a - b)^2 + 2ab + c^2 - ab - bc - ac = 0$, soit $(a - b)^2 + ab + c^2 - bc - ac = 0$, soit $(a - b)^2 + a(b - c) - c(b - c) = 0$, soit $(a - b)^2 + (a - c)(b - c) = 0$, soit $(a - b)^2 = (a - c)(c - b)$, soit, si les trois points A, B et C sont distincts, $\frac{a-b}{c-b} = \frac{a-c}{a-b}$.

Donc les arguments de ces deux nombres complexes sont égaux, soit $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On montre de même que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Ainsi les trois angles du triangle ABC sont égaux, donc ABC est équilatéral.