EXERCICE 1

1. On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ et

$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$.

a) Étudier les variations de ces deux fonctions.

b) En déduire le signe de $f(x)$ et de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

c) En déduire que pour tout réel x strictement positif, $\frac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$.

a) En utilisant la question 1, montrer que $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 2

On considère deux réels a et b strictement positifs tel que $a + b = 1$.

Le but de l'exercice est de démontrer que $a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant \ln 2$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 0$.

a) Étudier la continuité de f en 0 et en 1.

b) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

c) Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0; 1[$.

d) Dresser le tableau de variations de f et donner la valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. En déduire l'inégalité proposée au début de l'exercice.

3. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 2$.