DEVOIR MAISON n° 8 TERMINALE S

EXERCICE 1

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}$.

b) Calculer pour tout entier naturel n non nul, $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$. Donner l'interprétation géométrique de ce résultat.

c) En utilisant une interprétation géométrique, montrer que pour tout entier naturel n non nul,
$u_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant u_{n-1}$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $-\frac{1}{n} + \ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

e) Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

Étudier les variations de f.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[1; +\infty[$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n - \ln(n)$.
a) En utilisant la question 2, étudier les variations de la suite (v_n).
b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.
c) La suite (v_n) converge-t-elle ? On ne demande pas de déterminer la limite, si elle existe, de (v_n).

EXERCICE 2

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - 1$.
Étudier les variations et le signe de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$.

Étudier les variations et le signe de la fonction g sur $]0; +\infty[$.

3. On pose, pour tout entier naturel n, $J_n = \int_n^{n+1} g(t)\,dt$.

a) Pour $n < x < n + 1$, comparer $g(n)$, $g(x)$, $g(n + 1)$.
b) En déduire un encadrement de J_n.
c) Étudier les variations et la convergence de la suite (J_n). Préciser la limite de (J_n) si elle existe.