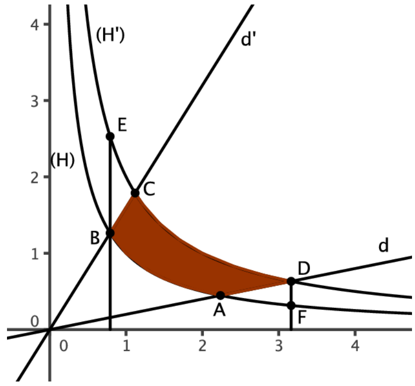
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 9 TERMINALE S *Avril 2008*

EXERCICE 1

On sait que la fonction F définie sur [a; $+\infty$ [par F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a. Donc F(x) = 2ln(x), soit f(x) = F '(x) = $\frac{2}{x}$. Ainsi $\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{2}{t}dt = [2\ln t]_a^x$ = 2ln(x) – 2ln(a).
Il faut donc que ln$a$ = 0, soit a = 1.

EXERCICE 2 1. La figure :



2. Pour calculer l'aire du quadrilatère curviligne ABCD en fonction de a et b, on calcule les coordonnées des points A, B, C et D: On suppose que $x > 0$.

L'abscisse de A vérifie l'équation $\frac{1}{x} = ax$, soit $x^2 = \frac{1}{a}$, soit $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$, et son ordonnée est $\sqrt{a}$.

L'abscisse de B vérifie l'équation $\frac{1}{x} = bx$, soit $x^2 = \frac{1}{b}$, soit $x = \frac{1}{\sqrt{b}}$, et son ordonnée est $\sqrt{b}$.

L'abscisse de C vérifie l'équation $\frac{2}{x} = bx$, soit $x^2 = \frac{2}{b}$, soit $x = \sqrt{\frac{2}{b}}$, et son ordonnée est $\sqrt{2b}$.

L'abscisse de D vérifie l'équation $\frac{2}{x} = ax$, soit $x^2 = \frac{2}{a}$, soit $x = \sqrt{\frac{2}{a}}$, et son ordonnée est $\sqrt{2a}$.

L'aire S curviligne ABCD est égale à l'aire comprise entre les courbes (H) et (H') et les droites d'équation $x = \frac{1}{\sqrt{b}}$ et $x = \sqrt{\frac{2}{a}}$, auquel on soustrait l'aire des triangles curvilignes BCE et ADF :

D'où S = $\int_{x_B}^{x_D}(\frac{2}{t}-\frac{1}{t})dt - \int_{x_A}^{x_D}(at-\frac{1}{t})dt - \int_{x_B}^{x_C}(\frac{2}{t}-bt)dt = [\ln t]_{x_B}^{x_D} - \left[\frac{a}{2}t^2-\ln t\right]_{x_A}^{x_D} - \left[2\ln t-\frac{b}{2}t^2\right]_{x_B}^{x_C} =$

$\ln\sqrt{\frac{2}{a}} - \ln\sqrt{\frac{1}{b}} - (\frac{a}{2}\times\frac{2}{a} - \ln\sqrt{\frac{2}{a}} - \frac{1}{2} + \ln\sqrt{\frac{1}{a}}) - (2\ln\sqrt{\frac{2}{b}} - 1 - 2\ln\sqrt{\frac{1}{b}} + \frac{1}{2}) = \ln\sqrt{b} - \ln\sqrt{a} = \ln\sqrt{\frac{a}{b}}$.

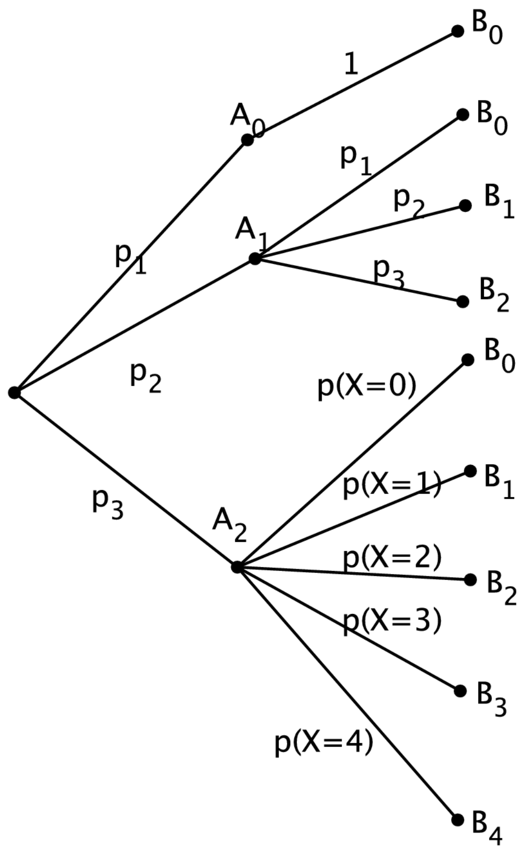
EXERCICE 3 : Soient A(1; 0), B(e; 1) et D le point d'intersection des deux tangentes.

L'équation de la tangente à C en A est $y = x - 1$; celle de la tangente à C en B est $y = \frac{x}{e}$. L'abscisse de D vérifie l'équation $x - 1 = \frac{x}{e}$, soit $x = \frac{e}{e-1}$.

L'aire demandée est égale à $\int_{x_A}^{x_D}(t-1-\ln t)dt + \int_{x_D}^{x_A}(\frac{t}{e}-\ln t)dt = \left[\frac{t^2}{2}-t-(t\ln t-t)\right]_{x_A}^{x_D} + \left[\frac{t^2}{2e}-(t\ln t-t)\right]_{x_D}^{x_B} =$
$\left[\frac{t^2}{2}-t\ln t\right]_{x_A}^{x_D} + \left[\frac{t^2}{2e}-t\ln t+t\right]_{x_D}^{x_B} = \frac{e^2}{2(e-1)^2} - \frac{e}{e-1}\ln(\frac{e}{e-1}) - \frac{1}{2} + \frac{e}{2} - e + e - \frac{e}{2(e-1)^2} + \frac{e}{e-1}\ln(\frac{e}{e-1}$
$) - \frac{e}{e-1} = \frac{e^2-e}{2(e-1)^2} - \frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \frac{e}{e-1} = \frac{e}{2(e-1)} + \frac{e-1}{2} - \frac{e}{e-1} = \frac{e^2-3e+1}{2(e-1)}$ en unité d'aires. Pour trouver l'aire en cm², on multiplie ce nombre par l'aire en cm² d'une unité d'aire, ici 8 cm², soit l'aire =
$4\,\frac{e^2-3e+1}{e-1} \simeq 0{,}535$.

EXERCICE 4

1. Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont 0, 1, 2, 3 ou 4. Comme les bactéries présentes dans le milieu de culture se comportent indépendamment les unes des autres, on obtient :
p(X = 0) = p(la bactérie b_1 meurt et la bactérie b_2 meurt) = $(p_1)^2$;
p(X = 1) = p(la bactérie b_1 meurt et la bactérie b_2 vit, ou la bactérie b_2 meurt et la bactérie b_1 vit) = $2p_1\,p_2$;
p(X = 2) = p(les bactéries b_1 et b_2 vivent, ou l'une meurt et l'autre se divise) =$(p_2)^2 + 2p_1p_3$;
p(X = 3) = p(l'une des bactéries vit et l'autre se divise) = $2p_2\,p_3$;
p(X = 4) = p(les bactéries b_1 et b_2 se divisent) = $(p_3)^2$.
On vérifie que $\sum_{k=0}^{k=4} p(X=k) = 1$: $\sum_{k=0}^{k=4} p(X=k) = (p_1)^2 + 2p_1\,p_2 + (p_2)^2 + 2p_1p_3 + 2p_2\,p_3 + (p_3)^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = 1$.
2. On suppose qu'à l'instant t = 0, une seule bactérie est présente dans le milieu de culture.
a) L'arbre de probabilité :



A l'instant t = 1, il y a 0, 1 ou 2 bactéries; et à l'instant t = 2, il y a 0, 1, 2, 3 ou 4 bactéries.
b) On désigne par A_1 l'événement « à l'instant t = 1, il y a une bactérie »;
B_2 l'événement « à l'instant t = 2, il y a deux bactéries ».
La probabilité de $p(A_1 \cap B_2) = p_2\,p_3$;
et $p(B_2) = p(A_1 \cap B_2) + p(A_2 \cap B_2) = p_2\,p_3 + p_3(\,(p_2)^2 + 2p_1\,p_3) = p_3(p_2)^2 + p_2\,p_3 + 2p_1(p_3)^2$.
c) On appelle Y le nombre de bactéries à l'instant t = 2.
La loi de probabilité de Y:
Les valeurs prises par la variable aléatoire Y sont 0, 1, 2, 3 ou 4.
p(Y = 0) = $p_1 + p_1p_2 + (p_1)^2p_3$;
p(Y = 1) = $(p_2)^2 + 2p_1p_2p_3$;
p(Y = 2) = $p_3(p_2)^2 + p_2\,p_3 + 2p_1(p_3)^2$;
p(Y = 3) = $2p_2(p_3)^3$;
p(Y = 4) = $(p_3)^3$.

On vérifie que $\sum_{k=0}^{k=4} p(Y=k) = 1$ en utilisant l'arbre :
$\sum_{k=0}^{k=4} p(Y=k) = p_1 + p_2(p_1 + p_2 + p_3) + p_3 \sum_{k=0}^{k=4} p(Y=k) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$.