DEVOIR SURVEILLE TERMINALE S 4 *Samedi 29 septembre 2007*

EXERCICE 1 (8 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. a) Montrer que pour $x \in]-\infty ; 1[$, $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = -\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

4. Étudier les variations de f sur l'ensemble $]-\infty ; 1[\cup]3; +\infty[$.

5. Dresser le tableau de variations de f.

6. Montrer que les droites d'équation $y = x - 2$ et $y = -x + 2$ sont asymptotes obliques à la courbe C représentative de f.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction f.

2. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

3. On admet que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

4. Déduire des questions 1 et 3 que $\lim\limits_{x \to -\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

5. Que peut-on déduire des questions 1, 3 et 4 pour la courbe C représentative de la fonction f ?

EXERCICE 3 (7 points)

1. On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a) Étudier le sens de variations de la suite (u_n).

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2. a) Calculer les quatre premiers termes de la suite.

b) Conjecturer une expression simple de u_n en fonction de n.

c) Démontrer cette conjecture.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = 2n + 3$.

b) Calculer la somme des vingt premiers termes de la suite (v_n).