CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLE N° 1 TERMINALE S 4

EXERCICE 1: 1. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$.
Le discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, donc il y a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Le signe de $x^2 - 4x + 3$ est positif pour les valeurs à l'extérieur des racines; soit $D_f =]-\infty\,;\,1] \cup [3;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ en utilisant la propriété: la limite d'un polynôme à l'infini est la limite de son terme de plus haut degré. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to3} f(x) = f(3) = 0$.

3. a) Pour $x \in]-\infty\,;\,1[$, $x - 1 = -\sqrt{(x-1)^2}$, d'où $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{-\sqrt{(x-1)^2}} = -\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$.

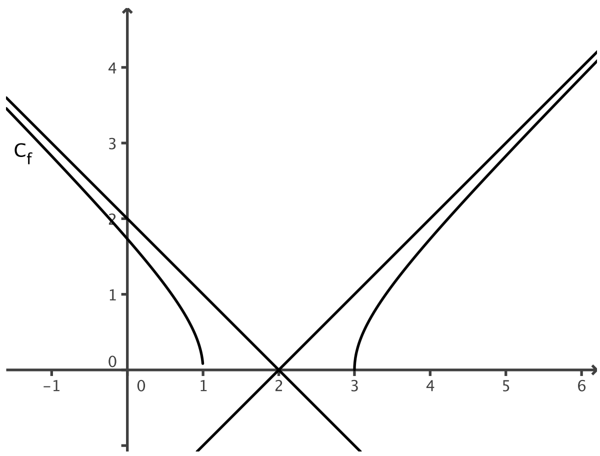
b) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (x-1) = 0^{-}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} (x-3) = -2$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{x-3}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}} = +\infty$, et la fonction f n'est pas dérivable en 1.

4. La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[\cup]3;+\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont.
On sait que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ qui est du signe de $x - 2$ puisque le dénominateur est strictement positif. Ainsi la fonction f est
Étudier les variations de f sur l'ensemble $]-\infty\,;\,1[\cup]3;+\infty[$.

5. Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

6. On a $f(x) - (x - 2) = \sqrt{x^2-4x+3} - (x-2) =$
$\dfrac{x^2-4x+3-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$,
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-2)) = 0$. Ainsi, la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$.
De même, On a $f(x) - (-x + 2) = \sqrt{x^2-4x+3} + x - 2 =$
$\dfrac{x^2-4x+3-(-x+2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x+2) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(-x+2)) = 0$.
Ainsi, la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.



EXERCICE 2 : 1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$ qui est centré en 0. De plus, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -x\sin\left(\dfrac{1}{-x}\right) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ car la fonction sinus est impaire. Donc la fonction f est paire.

2. On sait que pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$; et $-x \leqslant x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$.

Comme $\lim\limits_{x\to0} (-x) = \lim\limits_{x\to0} x = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

3. On admet que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. En posant X = $\frac{1}{x}$, on a $\frac{\sin X}{X} = \frac{\sin(1/x)}{1/x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. De plus, $\lim_{x \to +\infty} X = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$.

4. Comme la fonction *f* est paire et que $\lim_{x \to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, alors $\lim_{x \to -\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

5. La courbe C représentative de la fonction f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, et admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

EXERCICE 3 : 1. a) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 \geqslant 3 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrons que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$:

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0^2$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: supposons que pour une valeur de n, $u_n > n^2$; alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2 = (n + 1)^2 + 2 > (n + 1)^2$. Donc l'hérédité est démontrée.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

c) Comme $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, par les théorèmes de comparaison, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. a) Les quatre premiers termes de la suite : $u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + 2\times 0 + 3 = 4 = 2^2$, $u_2 = u_1 + 2\times 1 + 3 = 9 = 3^2$, $u_3 = u_2 + 2\times 2 + 3 = 16 = 4^2$.

b) On conjecture que pour tout entier naturel n, $u_n = (n + 1)^2$.

c) Démontrons cette conjecture par récurrence :

Initialisation: $u_0 = 1 = (0 + 1)^2$, donc a propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que pour une valeur de n, $u_n = (n + 1)^2$; alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$. Donc l'hérédité est démontrée.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $u_n = (n + 1)^2$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) On sait que $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, donc $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 3$. Donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 3$.

b) La somme des vingt premiers termes de la suite (v_n) est égale à $\sum_{k=0}^{k=19} v_k = 20\times\frac{v_0 + v_{19}}{2} = 10(3 + 41) = 440$.

On peut aussi remarquer que $\sum_{k=0}^{k=19} v_k = u_{20} - u_0 = 21^2 - 1 = 440$.