DEVOIR SURVEILLE N° 2 TERMINALE S 4 *Samedi 20 octobre 2007*

EXERCICE 1 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,1]$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. La fonction f est-elle continue en 1 ?
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 1.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 (7 points)

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) : $\cos x = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \cos x$.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Montrer que pour tout réel $x > \pi$, $f(x) > 0$.
3. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$ où $f''(x)$ désigne la dérivée seconde de la fonction f.
4. Déterminer le sens de variations de la fonction f' sur l'intervalle $[0; \pi]$.
5. Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.
6. En déduire le sens de variations de f sur $[0; \pi]$.
7. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution α sur $[0; \pi]$.
8. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
9. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 (6 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

1. a) Montrer que cette suite est majorée par 6.

b) Montrer que cette suite est croissante.

c) Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

2. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 6$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Montrer que cette suite est bornée par 0 et 2.
2. Montrer que cette suite est croissante.
3. Montrer que la limite l de la suite vérifie $l = \sqrt{1+l}$. Déterminer cette limite.