DEVOIR SURVEILLE N° 3 TERMINALE S 4 *Samedi 8 décembre 2007*

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A : Question de cours :

On suppose connus les résultats suivants:

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque: l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante : deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite.

Partie B:

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

EXERCICE 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unités graphiques: 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.
2. Justifier que, pour tout réel x, ($e^x - x$) est strictement positif.

Partie B :

1. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
3. Étudier le sens de variations de f.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
6. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe C par rapport à la tangente T.
7. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{2}$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

EXERCICE 3 (6 points)

1. a) Montrer que pour tout nombre complexe z , $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 8 = 0$.

c) Donner les solutions sous la forme trigonométrique.

2. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_3 = -2$.

a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$. En déduire le module et un argument de $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$.

b) Montrer que $z_1^3 = z_2^3 = -8$.