CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLE N° 3 TERMINALE S 4

EXERCICE 1 : Partie A : Question de cours :

Supposons (u_n) croissante et (v_n) décroissante. Alors (u_n) est minorée par son premier terme u_0 et (v_n) est majorée par son premier terme v_0 . Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Donc la suite (u_n) est majorée par v_0, et par la proposition (3), elle converge vers l. La suite (v_n) est minorée par u_0 , et par la proposition (3), elle converge vers l'. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, donc $l - l' = 0$, soit $l = l'$. Ainsi les deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite.

Partie B:

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

1. Si (u_n) est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Si $l \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{-2}{l}$ et (v_n) est convergente. Si $l = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$, et (v_n) est divergente. Donc proposition fausse.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$, donc $0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 > \dfrac{-2}{u_n} \geqslant -1$, alors (v_n) est minorée par – 1. Donc proposition vraie.

3. Si (u_n) est décroissante, alors pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$, donc $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{u_{n+1}}$ et $\dfrac{-2}{u_n} \geqslant \dfrac{-2}{u_{n+1}}$, donc $v_n \geqslant v_{n+1}$, alors (v_n) est décroissante. Donc proposition fausse.

4. Si (u_n) est divergente, alors plusieurs cas: Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, alors (v_n) converge vers 0. Si (u_n) n'a pas de limite, alors (v_n) n'a pas de limite. Donc proposition fausse.

EXERCICE 2 : Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $g'(x) = e^x - 1$; $g'(x) \geqslant 0$ équivaut à $e^x - 1 \geqslant 0$ équivaut à $e^x \geqslant 1$ équivaut à $x \geqslant 0$. Donc, la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
Donc la fonction g admet un minimum en $x = 0$, égal à $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Donc g est positive sur $\mathbb{R}$.

2. Comme g est positive sur $\mathbb{R}$, $e^x - x - 1 \geqslant 0$, soit $e^x - x \geqslant 1$, donc, pour tout réel x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B :

1. On peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{(e^x - x)/x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = -1$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

2. La courbe C admet deux asymptotes horizontales, une en $+\infty$ d'équation $y = 0$ et l'autre en $-\infty$ d'équation $y = -1$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Et $f'(x) = \dfrac{1(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$; le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $1 - x$.
D'où, la fonction f est croissante sur $]-\infty ; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

4. Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	0

Et $f(1) = \dfrac{1}{e - 1} \simeq 0,58$.

5. Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

6. Pour étudier la position de la courbe C par rapport à la tangente T, on étudie le signe

de $f\,'(x) - x = \dfrac{x}{e^x - x} - x = \dfrac{x - x(e^x - x)}{e^x - x} = \dfrac{x(-e^x + x + 1)}{e^x - x} = \dfrac{x(-g(x))}{e^x - x} = \dfrac{-x \times g(x)}{e^x - x}$ qui est du signe de $-x$

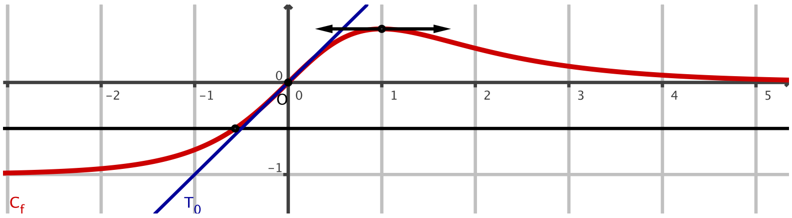
puisque, d'après la partie A, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 0$ et $e^x - x > 0$.

Ainsi, C est au-dessus de T sur $\mathbb{R}^-$ et au-dessous de T sur $\mathbb{R}^+$.

7. La fonction f est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante de $]-\infty\ ;\ 1]$ dans $]-1;\ \dfrac{1}{e-1}]$.

Or $\dfrac{-1}{2} \in\ ]-1;\ \dfrac{1}{e-1}]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{2}$ admet une unique solution α dans $]-\infty\ ;\ 1]$. De plus, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante de $[1;\ +\infty[$ dans $[\dfrac{1}{e-1}\ ;\ 0[$. Et $\dfrac{-1}{2} \notin [\dfrac{1}{e-1}\ ;\ 0[$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{2}$ n'a pas de solution dans $[1;\ +\infty[$. Ainsi l'équation $f(x) = \dfrac{-1}{2}$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Avec la calculatrice, on trouve une valeur approchée de α à 10^{-2} près : $\alpha = -0{,}57$.



EXERCICE 3 :

1. a) On a, pour tout nombre complexe z , $(z + 2)(z^2 - 2z + 4) = z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$.

b) L'équation $z^3 + 8 = 0$ est équivalente à $(z + 2)(z^2 - 2z + 4) = 0$, soit $z = -2$ ou $z^2 - 2z + 4 = 0$.

Le discriminant $\Delta = -12 < 0$, donc il y a deux solutions complexes : $z_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et

$z_2 = \dfrac{2 - i\sqrt{12}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = \bar{z}_1$. L'ensemble solution est $S = \{-2;\ 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\}$.

c) On calcule les modules de z_1 , de z_2 et de z_3 : $|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Ainsi $|z_2| = |\bar{z}_1| = |z_1| = 2$. $|z_3| = |-2| = 2$.

Soit $\theta = \arg(z_1)$. Alors $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Et $\arg(z_2) = \arg(\bar{z}_1) = -\arg(z_1) = \dfrac{-\pi}{3}\ [2\pi]$.

Donc $z_1 = 2(\cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3}))$ et $z_2 = 2(\cos(\dfrac{-\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{-\pi}{3}))$. Et $z_3 = -2 = 2(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

2. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_3 = -2$.

a) $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \dfrac{-2 - (1 - i\sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3} - (1 - i\sqrt{3})} = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \dfrac{(-3 + i\sqrt{3})(-2i\sqrt{3})}{(2i\sqrt{3})(-2i\sqrt{3})} = \dfrac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

$$\left|\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

Soit $\theta = \arg\left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right)$. Alors $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

b) D'après la question 1. b, z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $z^3 + 8 = 0$, soit $z^3 = -8$. Ainsi $z_1^3 = z_2^3 = -8$.