EXERCICE 1 (8 points)

Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1) :
$y' - 2y = xe^x$ **.**

1. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation différentielle (1).
b) Montrer que v est solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de (1).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (1).
4. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire .

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.
1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variations de g puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions, l'une entière et l'autre α.
4. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C : Étude de la fonction principale.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$.
3. Établir le tableau de variations de f.

EXERCICE 2 (8 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.
1. a) Déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
b) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
c) Placer les points A, B, B_1 et B'.
2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z + 1$.
a) Montrer que B a pour image B' par f.
b) Montrer que A est le seul point invariant par f.
c) Établir que, pour tout nombre complexe z distinct de i,
$$\frac{z'-z}{i-z} = -i\ .$$
d) Interpréter ce résultat en termes de distances, puis en termes d'angles.
e) En déduire une méthode de construction de M' à partir de M distinct de A.
3. a) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.
b) Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$.
c) En déduire que, si le point M appartient à Γ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Γ_2 dont on précisera le centre et le rayon.
d) Tracer Γ_1 et Γ_2.

EXERCICE 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $]3 ; +\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x - 3) - \ln(4x)$.
1. Étudier le sens de variations de f.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

Question subsidiaire:
Déterminer la limite de f en 3 et la limite en $+\infty$.