EXERCICE 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1;+\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.

a) Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

b) Calculer N(0). En déduire les variations de f.

3. a) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

4. Soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = [\ln(1+x)]^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0;+\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, $F'(x)$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$.

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe C au point O ? Justifier.

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq -1$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

b. Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat de la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A du domaine plan délimité par la courbe C, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et l'axe des abscisses.

EXERCICE 3 (4 points)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».

a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité de l'évènement T.

c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

EXERCICE 4 (3 points)

Un jeu consiste à miser un euro, puis à lancer deux fois un dé cubique équilibré. Si le joueur obtient un 6, il gagne 5 euros, et s'il obtient deux 6, il gagne 10 euros.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Montrer que les valeurs prises par X sont – 1, 4 et 9.

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance mathématique de X.