EXERCICE 1 : 1. Dans cette question, on suppose $n = 6$. Le nombre de boules est alors 10.

Les tirages sont équiprobables et simultanés, donc le nombre de tirages possibles est égal à $\binom{10}{2} = 45$.

La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est égale à la probabilité d'obtenir deux boules vertes + la probabilité d'obtenir deux boules blanches = $\dfrac{\binom{6}{2}+\binom{4}{2}}{45} = \dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$.

La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à la probabilité d'obtenir une boule verte et une boule blanche = $\dfrac{\binom{6}{1}\times\binom{4}{1}}{45} = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$.

2. Dans cette question l'entier n est quelconque supérieur ou égal à 2, et on note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.
Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont – 1 et 4.

a) Le nombre de tirages possibles est égal à $\binom{n+4}{2} = \dfrac{(n+4)(n+3)}{2}$.

$p(X = 4)$ = p(obtenir deux boules de la même couleur) = $\dfrac{\binom{4}{2}+\binom{n}{2}}{\dfrac{(n+4)(n+3)}{2}} = \dfrac{6+\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{(n+4)(n+3)}{2}} = \dfrac{12+n(n-1)}{(n+4)(n+3)}$.

$p(X = -1)$ = p(obtenir deux boules de couleurs différentes) = $\dfrac{\binom{4}{1}\times\binom{n}{1}}{\dfrac{(n+4)(n+3)}{2}} = \dfrac{8n}{(n+4)(n+3)}$.

b) L'espérance mathématique de X est égale à $E(X) = 4\times\dfrac{12+n(n-1)}{(n+4)(n+3)} - 1\ \dfrac{8n}{(n+4)(n+3)} = \dfrac{4n^2-12n+48}{(n+4)(n+3)}$.

c) Pour avoir $E(X) = 0$, il faut que $4n^2 - 12n + 48 = 0$; or le discriminant est strictement négatif, donc il n'y a aucune valeur de n pour laquelle $E(X) = 0$.

EXERCICE 2 :

1. On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$.

a) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-2) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$; ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont ;
$f'(x) = 2 + \dfrac{2x}{x^2+1}$. On sait que $x \in [0 ; +\infty[$, donc $\dfrac{2x}{x^2+1} \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0 ; +\infty[$ et la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

c) Le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-2 ↗	$+\infty$

d) La fonction f est continue puisque dérivable sur $[0 ; +\infty[$, et elle est strictement croissante de $[0 ; +\infty[$ dans $[f(0) ; +\infty[= [-2; +\infty[$.
Or $0 \in [-2 ; +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0 ; +\infty[$.

e) On sait que $f(0) = -2$ et $f(1) = \ln 2 > 0$,
donc f change de signe sur $[0; 1]$ et $0 < \alpha < 1$.

EXERCICE 3 : On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle [0 ;1] et vérifiant les conditions (P1), (P2) et (P3) suivantes :

- (P1) : f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ;1].
- (P2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
- (P3) : pour tout réel x de l'intervalle [0 ;1], $f(x) \leqslant x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \int_0^1 [x - f(x)]\,dx$.

1. Par (P3), pour tout réel x de l'intervalle [0 ;1], $f(x) \leqslant x$, donc $x - f(x) \geqslant 0$; par la positivité de l'intégrale, pour toute fonction f de (E), $I_f \geqslant 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $h(x) = 2^x - 1$.

a) La fonction h est dérivable sur [0 ; 1] comme somme de fonctions qui le sont ;
$h'(x) = 2^x \times \ln 2 > 0$ puisque $\ln 2 > 0$ et $2^x = e^{x\ln 2} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction h est strictement croissante sur [0 ; 1].
On a $h(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $h(1) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$; donc la fonction h vérifie les conditions (P1) et (P2).

b) Soit g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $g(x) = 2^x - x - 1$. La fonction g est dérivable sur [0 ; 1] comme somme de fonctions qui le sont ; $g'(x) = 2^x \times \ln 2 - 1$. Alors $g'(x) \geqslant 0$ si $2^x \times \ln 2 - 1 \geqslant 0$,
soit $2^x \times \ln 2 \geqslant 1$, soit $2^x \geqslant \dfrac{1}{\ln 2}$, soit $e^{x\ln 2} \geqslant \dfrac{1}{\ln 2}$, soit $x\ln 2 \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$, soit $x \geqslant \dfrac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2} \simeq 0{,}53$. Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\left[0 \,;\, \dfrac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2}\right]$ puis croissante sur $\left[\dfrac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2} \,;\, 1\right]$.
De plus, $g(0) = 0 = g(1)$; donc le maximum de g sur [0; 1] est 0. Ainsi, pour tout x de [0 ; 1], $g(x) \leqslant 0$.

c) Si pour tout x de [0 ; 1], $g(x) \leqslant 0$, alors $g(x) = h(x) - x \leqslant 0$, soit $h(x) \leqslant x$. Donc la fonction h vérifie les conditions (P1), (P2) et (P3), donc la fonction h appartient à l'ensemble (E).

d) $I_h = \int_0^1 [x - h(x)]\,dx = \int_0^1 (x - 2^x + 1)\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2^x}{\ln 2} + x\right]_0^1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\ln 2} + 1 + \dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$.

a) Le polynôme P vérifie la propriété (P2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1],
$P(0) = 0$ et $P(1) = 0$, équivalent à $c = 0$ et $a + b + c = 1$, équivalent à $c = 0$ et $a + b = 1$,
équivalent à $c = 0$ et $b = 1 - a$, équivalent à $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$.
P est dérivable sur comme polynôme, et $P'(x) = 2ax + 1 - a$. Comme $0 < a < 1$, alors $0 < 1 - a < 1$; donc $2ax \geqslant 0$ sur [0 ; 1], et $P'(x) \geqslant 0$; donc P est strictement croissante sur [0 ; 1]. Ainsi P vérifie (P1). On sait que P vérifie (P2); il reste à vérifier (P3) : $P(x) - x = ax^2 + (1 - a)x - x = ax^2 - ax = ax(x - 1)$. Sur [0; 1], $x - 1 \leqslant 0$, donc $P(x) - x \leqslant 0$, et ainsi $P(x) \leqslant x$. Donc P appartient à (E).

b) $I_P = \int_0^1 [x - P(x)]\,dx = \int_0^1 (-ax^2 + ax)\,dx = \left[\dfrac{-ax^3}{3} + a\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{-a}{3} + \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{6}$.

c) Il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$ si et seulement si $\dfrac{a}{6} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$ et $0 < a < 1$.

On obtient $a = 9 - \dfrac{1}{\ln 2} \simeq 0{,}344$ qui est comprise entre 0 et 1.