CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLE N° 7 TERMINALE S 4

EXERCICE 1 : 1. On tire au hasard de l'urne un paquet de trois jetons.

a) L'ensemble Ω des issues de cette expérience aléatoire est formé des triplets de trois lettres deux à deux distinctes choisies parmi les lettres A, B, C, D, E, F.

b)Card $\Omega = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \dfrac{6!}{3!\times 3!} = \dfrac{6\times 5\times 4}{3\times 2} = 20$.

2. a) On dénombre les triangles rectangles : à partir de chaque sommet, exemple A, on forme deux triangles rectangles, comme ABD et AFD; il y a six sommets, donc 12 triangles rectangles. Ainsi p(R) = $\dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$.

b) Il n'y a que deux triangles équilatéraux : ACE et BDF, donc p(L) = $\dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.

A partir de chaque sommet, exemple A, on forme un triangle isocèle non équilatéral, ABF; il y a six sommets, donc 6 triangles isocèles. Ainsi p(I) = $\dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$.

On s'aperçoit que les 20 triangles ont été dénombrés parmi les triangles rectangles, isocèles et équilatéraux,
donc p(Q) = 0.

3. On réitère dix fois cette expérience de tirer trois jetons de l'urne, en remettant les jetons dans l'urne après chaque tirage. Soit X le nombre de triangles rectangles; X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{3}{5}$, car l'épreuve de Bernoulli qui consiste à tirer trois jetons de l'urne se répète de manière identique et indépendante. Donc pour tout entier k compris entre 0 et 10, p(X = k) = $\begin{pmatrix}10\\k\end{pmatrix}\left(\dfrac{3}{5}\right)^k\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^{10-k}$.

Donc, la probabilité d'obtenir exactement trois triangles rectangles est égale à

$$p(X = 3) = \begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^7 = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}\times\frac{3^3\times 2^7}{5^{10}} = \frac{3^4\times 2^{10}}{5^9} = \frac{81\times 1024}{1953125} = \frac{82944}{1953125} \simeq 0,0425.$$

EXERCICE 2 : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) , on considère les points :
A(3 ; 1 ; –5), B(0 ; 4 ; –5), C(–1 ; 2 ; –5) et D(2 ; 3 ; 4).

1. Les points A, B et D sont alignés : **FAUX** car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ (– 3; 3; 0) et $\overrightarrow{AD}$ (– 1; 2; 9) ne sont pas colinéaires
2. La droite (AB) est contenue dans le plan d'équation cartésienne : $x + y = 4$: **VRAI** car les coordonnées des points A et B vérifient l'équation du plan, donc sont contenus dans le plan, et donc la droite aussi.
3. Une équation cartésienne du plan (BCD) est : $18x - 9y - 5z + 11 = 0$: **VRAI** car les coordonnées des trois points B, C et D vérifient l'équation $18x - 9y - 5z + 11 = 0$.
4. Les points A, B, C et D sont coplanaires : **FAUX** car les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation du plan (BCD).
5. La sphère de centre A et de rayon 9 est tangente au plan (BCD) : **FAUX** car la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\dfrac{|18\times 3-9\times 1-5\times(-5)+11|}{\sqrt{18^2+(-9)^2+(-5)^2}} = \dfrac{81}{\sqrt{430}} \neq 9$ (rayon de la sphère).
6. Une représentation paramétrique de la droite (BD) est : $\begin{cases} x=1-2k \\ y=\dfrac{7}{2}+k \\ z=\dfrac{-1}{2}-9k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$: **VRAI** car si on remplace les coordonnées de B et de D dans le système d'équations, on trouve respectivement $k = \dfrac{1}{2}$ et $k = \dfrac{-1}{2}$.

EXERCICE 3 :

Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGF. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$.

1. a. Pour démontrer que le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme, il suffit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{JF}$ sont égaux : on a D(0; 1; 0) et F(1; 0; 1). Les coordonnées de I, milieu de [AB] sont $I(\frac{1}{2} ; 0; 0)$.

Les coordonnées de J, milieu de [GH] sont $J(\frac{1}{2} ; 1; 1)$. Donc $\overrightarrow{DI}(\frac{1}{2} ; -1; 0)$ et $\overrightarrow{JF}(\frac{1}{2} ; -1; 0)$. Donc $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JF}$, et DIFJ est un parallélogramme.

Pour établir que DIFJ est un losange, il suffit de démontrer que ses diagonales sont perpendiculaires, ce qui revient à démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$. Or $\overrightarrow{DF}(1; -1 ; 1)$ et $\overrightarrow{IJ}(0; 1; 1)$.

Donc $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0 - 1 + 1 = 0$. Donc DIFJ est un losange. L'aire d'un losange est égale au produit des longueurs des diagonales divisé par 2; l'aire de DIFJ est égale à $\frac{DF \times IJ}{2} = \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\times\sqrt{0^2+1^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

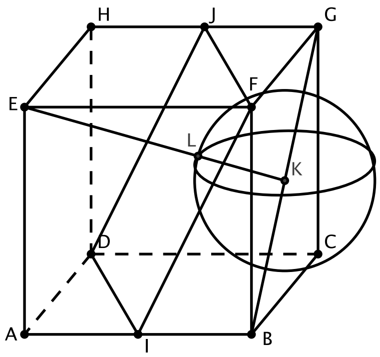
b. Pour vérifier que le vecteur $\vec{n}(2; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (DIJ), il suffit de vérifier que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs du plan (DIJ) : $\overrightarrow{DI}(\frac{1}{2} ; -1; 0)$ et $\overrightarrow{DI} \cdot \vec{n} = 1 - 1 + 0 = 0$. $\overrightarrow{IJ}(0; 1; 1)$ et $\overrightarrow{IJ} \cdot \vec{n} = 0 + 1 - 1 = 0$. Donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DI}$ et à $\overrightarrow{IJ}$, deux vecteurs du plan (DIJ).

Une équation cartésienne du plan (DIJ) est alors de la forme $2x + y - z + d = 0$. Pour déterminer d, on remplace x, y, z par les coordonnées d'un point du plan : D(0; 1; 0), on trouve $d = -1$.

Une équation cartésienne du plan est $2x + y - z - 1 = 0$.

c. La distance du point E au plan (DIJ) est donnée par $\frac{|2\times0+1\times0-1\times1-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$. La hauteur de la pyramide EDIFJ est égale à la distance de E au plan (DIJ). Donc le volume de la pyramide EDIFJ est égal à

$V = \frac{1}{3} \times \text{aire(DIFJ)} \times \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$.



2. a. Le vecteur $\vec{n}(2; 1; -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et E(0; 0; 1) est sur (Δ). Donc une représentation paramétrique de (Δ) est

$\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Pour prouver que K est un point de (Δ), on remplace les coordonnées de K(1; 0,5; 0,5) (isobarycentre de B, C, G et E), dans le système précédent, on trouve $t = 0,5$.

b. Les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DIJ) vérifient le système $\begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ x=2t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$. La première équation donne $2(2t) + t - (1 - t) - 1 = 0$, soit $t = \frac{1}{3}$. Donc $L(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3})$.

c. Le centre de gravité du triangle BEG est l'isobarycentre des points B, E et G; les coordonnées de cet isobarycentre sont $(\frac{x_B+x_E+x_G}{3} ; \frac{y_B+y_E+y_G}{3} ; \frac{z_B+z_E+z_G}{3})$, on trouve $(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3})$, donc L est le centre de gravité de BEG.

3. a. On a $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = (x-1)^2 - 1 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (z - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = 0$, soit

$(x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{6}$. Donc (S) est une sphère de centre $K(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

b. Les coordonnées de L vérifient l'équation de (S). On sait que K est sur la droite (Δ) perpendiculaire à (DIJ), L est sur (S), sur (Δ) et dans le plan (DIJ). Donc la sphère (S) coupe le plan (DIJ) en un seul point L.

Donc (DIJ) est tangent à (S) en L.