Corrigé Devoir maison n° 1 Terminale S spécialité Septembre 2007

Exercice 1

1. Déterminer l'ensemble E des entiers relatifs x tels que le nombre $n = x^2 + x - 2$ est divisible par 7.

On cherche n tel que $x^2 + x = 7q + 2$ avec q dans $\mathbb{Z}$, soit $x(x + 1) = 7q + 2$. Il suffit de chercher les restes de la division de $x^2 + x$ par 7 pour $x = 0, 1, 2, ..., 6$. On trouve :

x	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 + x$	0	2	6	5	6	2	0

Ce sont les nombres $x = 7k + 1$ ou $x = 7k - 2$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

2. On cherche n tel que $x^2 + x = 3q + 2$ avec q dans $\mathbb{Z}$, soit $x(x + 1) = 3q + 2$.
Avec la méthode de la question précédente, on trouve que ce sont les nombres $x = 3k + 1$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

3. Le nombre k est un entier relatif.
Si $x = 21k + 1$, alors $n = x^2 + x - 2 = (21k + 1)^2 + 21k + 1 - 2 = 441k^2 + 42k + 21k = 21(21k^2 + 3k) = 21\times3k(7k + 1)$.
Si k est pair, $k(7k + 1)$ est pair, et si k est impair, $7k + 1$ est pair, donc $k(7k + 1)$ est pair. Donc, pour tout $k \in\mathbb{Z}$, $k(7k + 1)$ est pair, donc divisible par 2, et $21\times3k(7k + 1)$ est divisible par $21\times2 = 42$.
Si $x = 21k - 2$, alors $n = x^2 + x - 2 = (21k - 2)^2 + 21k - 2 - 2 = 441k^2 + 42k + 21k = 21(21k^2 + 3k) = 21\times3k(7k + 1)$.
Comme précédemment, $21\times3k(7k + 1)$ est divisible par $21\times2 = 42$.

Exercice 2

1. On sait que $n^2 + 5n + 4 = (n + 1)(n + 4)$ et $n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$,
donc $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.

2. On peut écrire $3n^2 + 15n + 19 = (n + 1)(3n + 12) + 7$. Donc $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$ si 7 est divisible par $n + 1$. Le seuls diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7; donc $n + 1 = 7$ ou $n + 1 = 1$, soit $n = 6$ ou $n = 0$.
L'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$ est $\{0; 6\}$.

3. $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n^2 + 3n + 2$ si $3n^2 + 15n + 19 = (n^2 + 3n + 2)q$ avec $q \in\mathbb{Z}$.
Soit $3n^2 + 15n + 19 = (n + 1)(n + 2)q$, donc $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$, soit $n = 0$ ou $n = 6$.
Or, si $n = 0$, $3n^2 + 15n + 19 = 19$ et $n^2 + 3n + 2 = 2$, mais 19 n'est pas divisible par 2.
Si $n = 6$, $3n^2 + 15n + 19 = 217$ et $n^2 + 3n + 2 = 56$, mais 217 n'est pas divisible par 56.
Donc, quel que soit l'entier naturel n, $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

Exercice 3

1. Supposons que a et b sont tous les deux pairs; alors il existe des entiers c et d tels que $a = 2c$ et $b = 2d$.
Donc $a^2 + b^2 = 4c^2 + 4d^2 = 4(c^2 + d^2)$ qui est pair.
Supposons que a et b sont tous les deux impairs; alors il existe des entiers c et d tels que $a = 2c + 1$ et $b = 2d + 1$.
Donc $a^2 + b^2 = 4c^2 + 4c + 1 + 4d^2 + 4d + 1 = 2(2c^2 + 2d^2 + 2c + 2d + 1)$ qui est pair.
Ainsi, si a et b sont de même parité, alors $a^2 + b^2$ est pair. Donc la contraposée de cette propriété nous dit que si $a^2 + b^2$ est impair, alors a et b sont de parité différente.

2. Posons $n = a^2 + b^2$ où a et b sont des entiers. Si n est impair, alors a et b sont de parité différente. Supposons a pair et b impair. Alors il existe des entiers c et d tels que $a = 2c$ et $b = 2d + 1$.
Ainsi $n = a^2 + b^2 = 4c^2 + 4d^2 + 4d + 1 = 4(c^2 + d^2 + d) + 1 = 4k + 1$ où $k \in\mathbb{Z}$.

3. Tout entier naturel n peut s'écrire $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$, $4q + 3$, où $q \in\mathbb{Z}$, en utilisant les restes de la division de n par 4. Un entier de la forme $4k - 1$ peut s'écrire $4q + 3$, en posant $k = q + 1$. Cet entier est impair.
A la question 2, on a vu que les entiers impairs qui sont somme de deux carrés sont de la forme $4k + 1$.
Donc un entier de la forme $4k - 1$ ne peut pas être la somme de deux carrés.