Devoir maison n° 2 Terminale S spécialité Septembre 2007

Exercice 1

1. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

b) En déduire que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Pour tout entier naturel p, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

b) Démontrer que, si $p = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7.

c) Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

Exercice 2

1. Déterminer les restes successifs modulo 20 des termes de la suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 12n + 5$.

2. Même question avec les restes successifs modulo 6 des termes de la suite arithmétique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 10n + 3$.

3. Cas général: On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = an + b$, et on considère les restes successifs modulo p des termes de la suite arithmétique (u_n) (a, b, p sont des entiers naturels fixés, $p \geqslant 2$).

a) Combien existe-t-il de restes distincts possibles ?

b) En déduire que parmi les termes u_0 , u_1 , ..., u_p , il existe deux nombres ayant le même reste.

c) On note m et $m + q$ les deux plus petits rangs des termes de la suite vérifiant la propriété précédente.
Ainsi, $u_m \equiv u_{m+q}\ (p)$. Montrer que, pour tout entier k, $u_{q+k} \equiv u_q\ (p)$.

d) En déduire que la suite des restes est périodique de période q et que $q \leqslant p$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \overline{11...1}$, nombre qui s'écrit avec n fois le chiffre 1.

1. Quels sont les nombres premiers parmi u_2 , u_3 , ..., u_6 ?

2. Montrer que si n est multiple de 3, alors u_n n'est pas premier.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

4. En déduire que, si n n'est pas premier alors u_n n'est pas premier.