Corrigé Devoir maison n° 2 Terminale S spécialité

Exercice 1

1. a) On raisonne suivant les congruences modulo 7 : pour tout entier naturel n, $2^3 \equiv 1$ (7), donc $2^{3n} = \left(2^3\right)^n \equiv 1$ (7), donc $2^{3n} - 1 \equiv 0$ (7), et $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

b) Ainsi $2^{3n+1} = (2^3)^n \times 2 \equiv 2$ (7), et $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7.

Et $2^{3n+2} = (2^3)^n \times 2^2 = (2^3)^n \times 4 \equiv 4$ (7), et $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2. $2 \equiv 2$ (7), $2^2 \equiv 4$ (7), $2^3 = 8 \equiv 1$ (7), $2^4 = 16 \equiv 2$ (7), $2^5 = 32 \equiv 4$ (7), $2^6 = 64 \equiv 1$ (7). On voit apparaître une période de trois restes : 2, 4, 1. Pour k entier naturel, si $n = 3k$, $2^n \equiv 1$ (7), si $n = 3k + 1$, $2^n \equiv 2$ (7), si $n = 3k + 2$, $2^n \equiv 4$ (7).

3. Pour tout entier naturel p, on considère le nombre $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si $p = 3n$, alors $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} = 2^{3n} + (2^{3n})^2 + (2^{3n})^3 \equiv 1 + 1^2 + 1^3 \equiv 3$ (7). Donc le reste de la division de A_p par 7 est 3.

b) Si $p = 3n + 1$, alors $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} = 2^{3n+1} + (2^{3n+1})^2 + (2^{3n+1})^3 \equiv 2 + 2^2 + 2^3 \equiv 14 \equiv 0$ (7). Donc A_p est divisible par 7.

c) Si $p = 3n + 2$, alors $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} = 2^{3n+2} + (2^{3n+2})^2 + (2^{3n+2})^3 \equiv 4 + 4^2 + 4^3 \equiv 84 \equiv 0$ (7). Donc A_p est divisible par 7.

Exercice 2

1. On raisonne modulo 5 : Si $n \equiv 0$ (5), alors $u_n = 12n + 5 \equiv 5$ (20). Si $n \equiv 1$ (5), alors $u_n = 12n + 5 \equiv 17$ (20).
Si $n \equiv 2$ (5), alors $u_n = 12n + 5 \equiv 29 \equiv 9$ (20). Si $n \equiv 3$ (5), alors $u_n = 12n + 5 \equiv 41 \equiv 1$ (20).
Si $n \equiv 4$ (5), alors $u_n = 12n + 5 \equiv 53 \equiv 13$ (20).

2. On raisonne modulo 3 : Si $n \equiv 0$ (3), alors $v_n = 10n + 3 \equiv 3$ (6). Si $n \equiv 1$ (3), alors $v_n = 10n + 3 \equiv 13 \equiv 1$ (6).
Si $n \equiv 2$ (5), alors $v_n = 10n + 3 \equiv 23 \equiv 5$ (6).

3. Cas général: Pour tout entier naturel n, $u_n = an + b$, définie une suite arithmétique de raison a et de premier terme b.

a) Dans la division euclidienne de u_n par p, il existe p restes distincts possibles : 0, 1, 2, ..., $p - 1$.

b) Parmi les $p + 1$ termes $u_0, u_1, ..., u_p$, il existe au moins deux nombres ayant le même reste, puisqu'il y a plus de termes que de restes distincts possibles.

c) Comme $u_m \equiv u_{m+q}$ (p) et $u_{m+q} = u_m + a(q + m - m) = u_m + aq \equiv u_m$ (p), d'où $aq \equiv 0$ (p), donc aq est divisible par p.
Pour tout entier k, on a $u_{q+k} = u_k + a(q + k - k) = u_k + aq \equiv u_k$ (p).

d) On prend $k = 0$: les restes de la division de $u_0, u_1, ... u_{q-1}$ par p sont distincts, et $u_0 \equiv u_q \equiv u_{2q}$ ...
La suite des restes est donc périodique de période q et $q \leqslant p$.

Exercice 3

1. $u_2 = 11$ est premier, $u_3 = 111 = 3\times37$, $u_4 = 1111 = 11\times101$, $u_5 = 11111 = 41\times271$, $u_6 = 111111 = 3\times7\times11\times13\times37$.
Seulement, u_2 est premier.

2. Si n est multiple de 3, alors $u_n = 111 + 111\times10^3 + 111\times10^6 + ... + 111\times10^{3(k-1)} = 111(10^3 + 10^6 + ... + 10^{3(k-1)})$ est divisible par 111, donc n'est pas premier.

3. Pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + 10 + 100 + 1000 + ... + 10^{n-1}$ = somme des termes d'une suite géométrique de raison 10 et de premier terme 1 = $1\times\dfrac{1-10^n}{1-10} = \dfrac{10^n-1}{9}$.

4. Pour tout réel x, et tout entier naturel q, $x^q - 1 = (x - 1)(x^{q-1} + x^{q-2} + ... + x^2 + x + 1)$.
Si n n'est pas premier alors il existe des entiers q et p différents de 1 tels que $n = pq$.

Ainsi $u_n = \dfrac{10^n-1}{9} = \dfrac{(10^p)^q-1}{9} = \dfrac{(10^p-1)((10^p)^{q-1}+(10^p)^{q-2}+...+10^p+1)}{9} = u_p((10^p)^{q-1}+(10^p)^{q-2}+...+10^p+1)$

divisible par u_p qui est différent de 1 et de u_n. Donc u_n n'est pas premier.