Devoir maison n° 3 Terminale S spécialité Septembre 2007

Exercice 1

Partie A : L'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$ est un exemple d' équation diophantienne.
Le but de l'exercice est de trouver les entiers naturels solution de cette équation. On les appelle les triplets pythagoriciens.

1. Démontrer que pour tous nombres réels u et v, $(2uv)^2 + (u^2 - v^2)^2 = (u^2 + v^2)^2$.
2. Trouver alors trois triplets pythagoriciens, en donnant des valeurs à u et à v.
3. Si d est un entier naturel, les nombres $d(2uv) + d(u^2 - v^2)$ *et* $d(u^2 + v^2)$ sont-ils solutions de l'équation de Pythagore ?
4. Montrer que si u et v sont de parité différente, il en est de même de x et de y.
5. Montrer que si u et v sont premiers entre eux, il en est de même de x et de y, de x et de z et de y et de z.

Partie B : On suppose que x, y et z sont solutions de l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$ et que $x < y < z$.

1. Montrer que l'un au moins des nombres est pair.
2. Montrer que l'un au moins des nombres est divisible par 3.
3. Montrer que l'un au moins des nombres est divisible par 4.
4. Montrer que l'un au moins des nombres est divisible par 5.

Exercice 2

On considère l'équation (E) d'inconnue n entier naturel : $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel.

1. a) Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
b) Si oui, préciser la seconde solution de (E).
2. a) Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
b) Si oui, préciser la seconde solution de (E).
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994.
4. En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admettent deux solutions entières.

Exercice 3

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k + 5$ où $k \in \mathbb{N}$.

1. a) Déterminer six nombres premiers de cette forme.
b) Déterminer six nombres composés de cette forme.
2. Montrer que tout nombre premier, autre que 2 et 3 est de la forme $6k + 1$ou $6k + 5$, où $k \in \mathbb{N}$.
3. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers de la forme $6k + 5$ que l'on nomme p_1 , p_2 , ... , p_n .
On considère le nombre $N = 6\, p_1 p_2 \ldots p_n - 1$.
a) Justifier que $N \equiv -1\ (6)$.
b) En déduire que N est de la forme $6k + 5$ puis qu'il ne peut être premier.
c) Montrer qu'aucun des nombres p_1 , p_2 , ... , p_n ne divisent N et en déduire que les diviseurs premiers de N sont de la forme $6k + 1$.
d) Montrer que $N \equiv 1\ (6)$.
4. Conclure.