Corrigé Devoir maison n° 3 Terminale S spécialité

Exercice 1 : Partie A : L'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$ est un exemple d' équation diophantienne.

1. Pour tous nombres réels u et v,
$(2uv)^2 + (u^2 - v^2)^2 = 4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$.

2. Pour trouver trois triplets pythagoriciens, il suffit de poser
$x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$ et $z = u^2 + v^2$. Exemple :

u	v	x	y	z
2	1	4	3	5
3	1	6	8	10
3	2	12	5	13

3. Si d est un entier naturel, les nombres $d(2uv)$, $d(u^2 - v^2)$ et $d(u^2 + v^2)$ sont solutions de l'équation de Pythagore, puisque $[d(2uv)]^2 + [d(u^2 - v^2)]^2 = d^2(2uv)^2 + d^2(u^2 - v^2)^2 = d^2[(2uv)^2 + (u^2 - v^2)^2] = d^2(u^2 + v^2)^2 = [d(u^2 + v^2)]^2$.

4. Comme $x = 2uv$, x est pair. Si u et v sont de parité différente, soit $u = 2k$ et $v = 2k' + 1$, avec k et k' dans $\mathbb{N}$, alors $y = u^2 - v^2 = 4k^2 - (4k'^2 + 4k' + 1) = 4(k^2 - k'^2 + k') + 1$ qui est impair. De même, si $u = 2k + 1$ et $v = 2k'$, $y = u^2 - v^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4k'^2 = 4(k^2 - k'^2 + k) + 1$ qui est impair.

5. On utilise les propriétés suivantes: pour tous entiers naturels a et b , $\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(a; a - b) = \text{pgcd}(a + b; a)$.
Si a et b sont premiers entre eux et de parité différente, alors $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.
Ainsi, si u et v sont premiers entre eux, alors u^2 et v^2 sont premiers entre eux; en effet, les décompositions en facteurs premiers de u et de v contiennent des nombres premiers différents, donc u^2 et v^2 aussi.
Ainsi $u^2 - v^2$ et $u^2 + v^2$ sont premiers entre eux, donc y et z sont premiers entre eux. Soit g un diviseur commun de x et de y. Alors g divise x^2 et y^2 , donc divise z^2. Or, y et z premiers entre eux implique y^2 et z^2 premiers entre eux.
Donc $g = 1$. Donc x et y sont premiers entre eux. De même pour x et z.

Partie B : On suppose que x, y et z sont solutions de l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$ et que $x < y < z$.

1. Supposons x et y impairs: $x = 2p + 1$ et $y = 2q + 1$, alors $z^2 = x^2 + y^2 = 4(p^2 + q^2 + p + q) + 2$, de la forme $4k + 2$. Ce qui est impossible, car le carré d'un entier ne peut s'écrire sous la forme $4k + 2$. En effet, en raisonnant modulo 4, les restes de la division euclidienne d'un carré par 4 sont 0 ou 1. Ainsi, nécessairement, x ou y est pair.

2. On raisonne modulo 3, en cherchant les congruences de $x^2 = z^2 - y^2$ suivant les congruences de y et z modulo 3 :
Dans les autres cas, y ou z est divisible par 3.

z	y	z^2	y^2	x^2	Conclusion
1	1	1	1	0	x est divisible par 3
2	1	4	1	0	x est divisible par 3
1	2	1	4	0	x est divisible par 3
2	2	4	4	0	x est divisible par 3

3. On suppose qu'il existe des entiers u et v tels que $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$ et $z = u^2 + v^2$. Si u ou v est pair, alors x est divisible par 4. Sinon, u et v sont impairs, soit $u = 2k + 1$ et $v = 2k' + 1$, avec k et k' dans $\mathbb{N}$,
alors $y = u^2 - v^2 = (4k^2 + 4k + 1) - (4k'^2 + 4k' + 1) = 4(k^2 - k'^2 + k + k')$ qui est divisible par 4.

4. On suppose qu'il existe des entiers u et v tels que $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$ et $z = u^2 + v^2$. On raisonne modulo 5 :
Si u ou v est divisible par 5, alors x est divisible par 5.
Si $u \equiv v$ (5), alors $u^2 \equiv v^2$ (5), alors $y = u^2 - v^2$ est divisible par 5.
Autres cas dans le tableau :

u	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
v	2	3	4	1	3	4	1	2	4	1	2	3
x	4	1	1	4	2	1	1	2	1	3	1	4
y	– 3	– 8	0	3	0	– 2	2	0	– 2	0	2	2
z	0	0	2	0	3	0	0	3	0	2	0	0

D'après le tableau, l'un des nombres y *ou* z est divisible par 5. Donc l'un au moins des nombres est divisible par 5.

Exercice 2

1. a) 3 est solution de (E) si $3^2 - 3S + 11994 = 0$, soit S = $\frac{12003}{3}$ = 4001.

b) Dans ce cas, la seconde solution a de (E) vérifie $3a = 11994$, soit $a = \frac{9991 \quad 4}{3}$ = 3998.

2. a) 5 est solution de (E) si $5^2 - 5S + 11994 = 0$, soit S = $\frac{012 \quad 9}{5}$ = 2403,8 qui n'est pas un entier. Donc 5 n'est pas solution de (E).

b) Il n'y a pas de solution entière.

3. Pour tout entier n solution de (E), on a $n^2 - Sn + 11994 = 0$, soit $n(n - S) = -11994$, et n est un diviseur de 11994.

4. La décomposition de 11994 en facteurs premiers est $11994 = 2\times3\times1999$.

Les diviseurs de 11994 sont donc {1; 2; 3; 6; 1999; 3998; 5997; 11994}.

Si $n = 1$, S = 11994; si $n = 2$, S = 5999; si $n = 6$, S = 2005; si $n = 1999$, S = 2005;

si $n = 3998$; S = 4001; si $n = 5997$, S = 5999; si $n = 11994$, S = 11995.

Exercice 3 1. a) Six nombres premiers de cette forme:

k	0	1	2	3	4	6
$6k + 5$	5	11	17	23	29	41

b) Pour déterminer six nombres composés de cette forme, il suffit de prendre k multiple de 5, et $6k + 5$ est multiple de 5.

2. Tout nombre entier n peut s'écrire sous l'une des formes $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$ où $k \in \mathbb{N}$. Les nombres de la forme $6k$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 3 = 3(2k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$ sont composés donc non premiers. Ainsi, tout nombre premier, autre que 2 et 3 est de la forme $6k + 1$ou $6k + 5$, où $k \in \mathbb{N}$.

3. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers de la forme $6k + 5$ que l'on nomme p_1 , p_2 , ... , p_n .

On considère le nombre $N = 6\, p_1p_2 ...p_n - 1$.

a) On sait que $6\, p_1p_2 ...p_n \equiv 0\ (6)$, donc $N \equiv -1\ (6)$.

b) On sait que $-1 \equiv 5\ (6)$, donc $N \equiv 5\ (6)$. Alors, 5 est le reste de la division de N par 6, et N est de la forme $6k + 5$. Comme, pour $i = 1, 2, ..., n$, $p_i > 1$, alors $6\, p_i > 6$, $6\, p_ip_1 > 6p_1$, donc $6\, p_ip_1 - 1 > 6p_1 - 1 > p_1$, $N = 6\, p_1p_2 ...p_n - 1$ est strictement supérieur à tous les p_i et de la forme $6k + 5$, donc N n'est pas premier.

c) Pour $i = 1, 2, ..., n$, $N \equiv -1\ (p_i)$. Donc les nombres p_1 , p_2 , ... , p_n ne divisent pas N. Ce sont les seuls diviseurs premiers de la forme $6k + 5$, donc les diviseurs premiers de N sont de l'autre forme $6k + 1$.

d) La décomposition en facteurs premiers de N est de la forme $(6k_1+1)^{\alpha_1}\ (6k_2+1)^{\alpha_2} ... (6k_1+1)^{\alpha_m} = 6K + 1$,

et donc $N \equiv 1\ (6)$.

4. On a vu que $N \equiv -1\ (6)$ et $N \equiv 1\ (6)$. Ce qui est impossible. Donc l'hypothèse « il existe un nombre fini de nombres premiers de la forme $6k + 5$ » est fausse. Donc il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6k + 5$ où $k \in \mathbb{N}$.