Devoir maison n° 4 Terminale S spécialité *Décembre 2007*

Exercice 1

1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.
2. On considère un entier naturel a.

a) Justifier que $a^{561} - a = a(a^{2\times 280} - 1) = a(a^2 - 1)k$ avec k entier naturel.

b) En déduire que $a^{561} - a$ est multiple de 3.

3. De la même manière, montrer que $a^{561} - a$ est multiple de 11 et de 17.
4. En déduire que, pour tout entier naturel a, $a^{561} \equiv a$ (561).

Exercice 2

1. On considère un entier naturel n et on pose $a = 38n + 29$, $b = 31n - 29$.

a) Démontrer que si d est un diviseur de a et de b, alors d divise 2001.

b) Écrire 2001 en produit de facteurs premiers.

c) Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de a et de b ?

d) Pour certaines valeurs de n, justifier qu'il existe un entier m tel que $2001m = 38n + 29$.

2. On appelle (E) l'équation $2001m = 38n + 29$.

a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers x et y tels que $2001x - 38y = 1$.

b) En déduire que $m = -87$ et $n = -4582$ sont des solutions particulières de l'équation (E).

c) Démontrer que toutes les valeurs possibles de n sont de la forme $n = -4582 + 2001k$ avec k entier relatif.

d) Vérifier que a et b sont alors donnés par $a = 2001(38k - 87)$ et $b = 2001(31k - 71)$.

3. Démontrer que, quel que soit k, a et b ont 2001 pour PGCD.
4. Quels sont les plus petits nombres a et b positifs ayant 2001 pour PGCD ?

Exercice 3

On considère la suite des entiers naturels 31, 331, 3331, ... et on appelle u_n l'entier de la suite dont l'écriture comporte n fois le chiffre 3.

1. Démontrer que les sept premiers termes de la suite sont premiers.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{1}{3}(10^{n+1} - 7)$.
3. Divisibilité par 17:

a) Vérifier que $10^2 \equiv -2$ (17).

b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

4. Divisibilité par 19:

a) Vérifier que $10^2 \equiv 5$ (19).

b) En déduire le reste dans la division euclidienne de 10^{12} par 19.

c) Démontrer que u_{11} est divisible par 19.

d) Justifier que $10^{18} \equiv 1$ (19).

e) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{18k+11} est divisible par 19.