Corrigé Devoir maison n° 5 Terminale S spécialité *Janvier 2008*

Exercice 1 : On considère deux nombres premiers p et q supérieurs ou égaux à 11.

1. Les nombres p et q sont des nombres premiers supérieurs à 11, donc sont impairs; ainsi, il existe deux entiers naturels k et k' tels que $p = 2k + 1$ et $q = 2k' + 1$. Ainsi $p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Le produit de deux entiers consécutifs étant toujours pair, $k(k+1) = 2r$ avec r entier naturel, et $p^2 - 1 = 8r$, donc $p^2 - 1$ est divisible par 8. De même pour $q^2 - 1$.
2. Les nombres p et q sont des nombres premiers supérieurs à 11, ils ne sont pas multiples de 3, donc $p \equiv 1\ (3)$, ou $p \equiv 2\ (3)$; soit $p^2 \equiv 1\ (3)$, ou $p^2 \equiv 4 \equiv 1\ (3)$. De même pour q. Donc p^2 et q^2 sont congrus à 1 modulo 3.
3. Les nombres p et q sont des nombres premiers supérieurs à 11, donc ils sont premiers avec 7. D'après le petit théorème de Fermat : $p^6 \equiv 1\ (7)$, et $q^6 \equiv 1\ (7)$, donc $p^6 - q^6 \equiv 0\ (7)$, et $p^6 - q^6$ est divisible par 7.
4. On sait que pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
donc $p^6 - q^6 = (p^2)^3 - (q^2)^3 = (p^2 - q^2)(p^4 + p^2q^2 + q^4)$, donc $p^6 - q^6$ est divisible par $p^2 - q^2$.
5. Les nombres p et q sont des nombres premiers supérieurs à 11, donc ils sont premiers avec 5.
Congruences de $p^2 - 1$ modulo 5:

p	1	2	3	4
p^2	1	4	4	1
$p^2 - 1$	0	3	3	0

Donc, si p ou q est congru à 1 ou 4 modulo 5, alors $(p^2 - 1)$ ou $(q^2 - 1)$ est divisible par 5. Sinon, p et q sont congrus à 2 ou 3 modulo 5, alors p^2 et q^2 sont congrus à 3 modulo 5, donc $p^2 - q^2$ est divisible par 5.
Donc, dans tous les cas, $A = (p^2 - 1)(q^2 - 1)(p^6 - q^6)$ est divisible par 5.
6. La décomposition en produit de facteurs premiers de 2903040 est $2^{10} \times 3^4 \times 5 \times 7$.
Divisibilité par 2^{10} : On a vu que $p^2 - 1 = 8r$, et $q^2 - 1 = 8s$, avec r *et* s dans $\mathbb{N}$.
D'où $A = (p^2 - 1)(q^2 - 1)(p^2 - q^2)(p^4 + p^2q^2 + q^4) = 8r8s(8r - 8s)(p^4 + p^2q^2 + q^4) = 8^3rs(r-s)(p^4 + p^2q^2 + q^4) = 2^9rs(r-s)(p^4 + p^2q^2 + q^4)$. On raisonne sur r et s : si l'un des deux est pair, alors rs est pair; s'ils ont tous les deux impairs, alors $r - s$ est pair. Donc, dans tous les cas, $rs(r-s)$ est pair et $rs(r-s) = 2m$. Ainsi A est divisible par 2^{10}.
Divisibilité par 3^4 : p^2 et q^2 sont congrus à 1 modulo 3, donc $(p^2 - 1)(q^2 - 1)$ est divisible par 3^2 ; d'après le petit théorème de Fermat : $p^2 \equiv 1\ (3)$, donc $p^4 \equiv p^2 \equiv 1\ (3)$, et $q^4 \equiv q^2 \equiv 1\ (3)$,
donc $p^4 + p^2q^2 + q^4$ est divisible par 3 ainsi que $p^2 - q^2$. Donc, $p^6 - q^6$ est divisible par 3^2. Ainsi A est divisible par 3^4.
On sait aussi que A est divisible par 5 et par 7.
Ainsi A est divisible par $2^{10} \times 3^4 \times 5 \times 7 = 2903040$.

Exercice 2 : On considère la réflexion f d'axe la droite d'équation $y = x$, la réflexion g d'axe la droite d'équation $y = 0$ et la réflexion h d'axe la droite d'équation $x = 0$.

1. Écritures complexes de ces trois transformations : f s'écrit $z' = i\,\overline{z}$; g s'écrit $z' = \overline{z}$; h s'écrit $z' = -\overline{z}$.
2. a) $h \circ g$ est la symétrie centrale de centre O.

$f \circ g$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. $g \circ h = h \circ g$.

$f \circ h$ est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. $f \circ g \circ h$ est la réflexion d'axe la droite d'équation $y = -x$.

b) Écritures complexes de ces transformations:

$h \circ g$ s'écrit $z' = -\left(\overline{\overline{z}}\right) = -z$ qui est l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre O.

$f \circ g$ s'écrit $z' = i\left(\overline{\overline{z}}\right) = iz$ qui est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$g \circ h = h \circ g$.

$f \circ h$ s'écrit $z' = i\left(\overline{-\overline{z}}\right) = -iz$ qui est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

$f \circ g \circ h$ s'écrit $z' = i\left(\overline{\overline{\left(-\overline{z}\right)}}\right) = -i\,\overline{z}$ qui est l'écriture complexe de la réflexion d'axe la droite d'équation $y = -x$.