Exercice 1 1. L'écriture complexe d'une similitude directe s de centre O est de la forme $z' = az$. Comme $A_1 = s(A_0)$, alors $2 + 2i = 4a$, soit $a = \dfrac{1+i}{2}$. Donc A_1 est l'image de A_0 dans une similitude directe s de centre O, de rapport $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et d'angle $\arg\left(\dfrac{1+i}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. 2. L'écriture complexe de s est $z' = \dfrac{1+i}{2}z$.

3. L'affixe de $A_2 = s(A_1)$ est $z_2 = \dfrac{1+i}{2}(2 + 2i) = (1 + i)^2 = 2i$.

4. Pour tout entier naturel n, on note $A_{n+1} = s(A_n)$ et notons z_n l'affixe de A_n. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n z_0 = 4\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$: Initialisation : $z_0 = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^0 z_0 = 4$.

Hérédité : Supposons que pour un n, $z_n = 4\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$, et montrons que $z_{n+1} = 4\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{n+1}$:

$$z_{n+1} = 4\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n = \frac{1+i}{2}\,4\left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 4\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1}.$$

a) Si $n \equiv 2\ (4)$, alors il existe un entier naturel k tel que $n = 4k + 2$; montrons par récurrence sur k que A_n est sur l'axe des ordonnées:

Initialisation : Si $k = 0$, $n = 2$, et l'affixe de A_2 est $2i$ qui est un imaginaire pur, donc A_2 est sur l'axe des ordonnées.

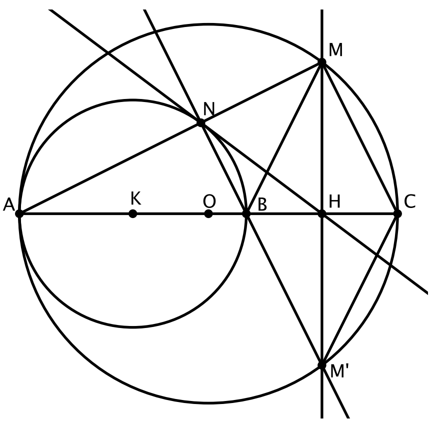
Hérédité : Supposons que pour un k, avec $n = 4k + 2$, A_n est sur l'axe des ordonnées, et montrons que pour $k + 1$, soit $n = 4(k + 1) + 2 = 4k + 6$, A_{4k+6} est sur l'axe des ordonnées:

$z_{4k+6} = 4\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{4k+6} = 4\left(\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^4\right)^k \times \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^6 = \left(\dfrac{-1}{4}\right)^k \times \dfrac{-i}{2}$ qui est un imaginaire pur, donc A_{4k+6} est sur l'axe des ordonnées. Ainsi, si $n \equiv 2\ (4)$, alors A_n est sur l'axe des ordonnées.

b) On a $A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$. Pour tout entier naturel n, $A_{n+1}A_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|z_n \dfrac{1+i}{2} - z_n\right| = \left|z_n\left(\dfrac{1+i}{2} - 1\right)\right| = |z_n|\left|\dfrac{-1+i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,4\left|\dfrac{1+i}{2}\right|^n = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ qui est le terme d'une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $2\sqrt{2}$. Donc $l_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k = 2\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

c) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ puisque la raison est strictement comprise entre 0 et 1, alors

$$\lim_{n\to+\infty} l_n = \frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2} = 4\sqrt{2}+4.$$



Exercice 2 1. Le triangle ACM est inscrit dans un cercle et le côté [AC] et un diamètre du cercle, donc ce triangle est rectangle en M. Le point H est le milieu de [BC]. Les triangles OHM et OHM' sont isométriques puisque [OH] est commun aux deux triangles, OM = OM' = rayon du cercle (C) et $\widehat{\mathrm{OHM}} = \widehat{\mathrm{OHM}}' = 90°$. Donc HM = HM', H est aussi le milieu de [MM'] et le quadrilatère BMCM' est un parallélogramme. De plus, BM = CM puisque M est sur la médiatrice de [BC], donc BMCM' est un losange. Comme (CM) et (BM') = (BN) sont parallèles, alors $\widehat{\mathrm{M\ B}} = 90°$.

L'angle de la similitude s est $\frac{-\pi}{2}$. Le rapport de la similitude s est égal à $\frac{NB}{MN}$:

On a AC = AB + BC = 10. Soit O le centre du cercle de diamètre [AC]. Alors AO = 5 et OH = OC – CH = 3. Dans le triangle OHM rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore : HM = 4. Dans le triangle BHM rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore : $BM^2 = BH^2 + HM^2 = 2^2 + 4^2 = 20$, et BM = BM' = CM = CM' = $2\sqrt{5}$.

On applique le théorème de Thalès dans le triangle ACM, avec B sur [AC], N sur [AM] et (BN) // (CM) :

$\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM} = \frac{NB}{MC}$; d'où NB = $\frac{AB \times MC}{AC} = \frac{6 \times 2\sqrt{5}}{10} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, et AN = $\frac{AB \times AM}{AC} = \frac{6 \times 4\sqrt{5}}{10} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Dans le triangle AMC rectangle en M, on applique le théorème de Pythagore : $AM^2 = AC^2 - MC^2 = 100 - 20 = 80$, soit AM = $4\sqrt{5}$.

Donc MN = AM – AN = $4\sqrt{5} - \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. Le rapport de s est égal à $\frac{NB}{MN} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \times \frac{5}{8\sqrt{5}} = \frac{3}{4}$.

2. L'image de (d) par s est une droite passant par B image de M et perpendiculaire à (d), soit la droite (AB).

3. Le point N étant le centre de la similitude s, l'image de (M'N) par s est une droite perpendiculaire à (M'N) passant par N, soit la droite (AM).

4. L'image de M' est à l'intersection des images des droites (M'N) et (d), donc à l'intersection de (AB) et (AM). Donc s(M') = A.

5. Le point H est le milieu de [MM']. Comme s(M) = B et s(M') = A, alors l'image de H par s est le milieu K de [AB].

6. Le milieu K de [AB] est le centre du cercle de diamètre [AB]. Le triangle ANB est rectangle en N, donc N est sur ce cercle. Comme (NH) est perpendiculaire à [NK], rayon du cercle, alors la droite (NH) est tangente au cercle de diamètre [AB].

Exercice **3** 1. On a $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$.

Donc $z' = x' + iy' = (-x - y + 2) + i(x - y - 1) = -x - iy + ix - y + 2 - i = -z + i(x + iy) + 2 - i = (-1 + i)z + 2 - i$.

2. a) L'écriture précédente est celle d'une similitude plane directe. Donc s est une similitude plane directe.

b) Le rapport de s est égal à $|-1 + i| = \sqrt{2}$. L'angle de s est égal à $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$. Son centre I a une affixe z_I vérifiant $z_I = (-1 + i)\, z_I + 2 - i$, soit $(2 - i)\, z_I = 2 - i$, soit $z_I = 1$.

3. a) Soit z'' l'affixe de M'' et z_G l'affixe de G.

Alors $z'' = (-1 + i)z' + 2 - i = (-1 + i)[(-1 + i)z + 2 - i] + 2 - i = (-1 + i)^2 z + (-1 + i)(2 - i) + 2 - i = -2iz + 1 + 2i$.

Et $z_G = \frac{z+z'+z''}{3} = \frac{z+(-1+i)z+2-i-2iz+1+2i}{3} = \frac{-iz+3+i}{3}$.

b) L'écriture complexe $z_G = \frac{-iz+3+i}{3} = \frac{-i}{3}z+1+\frac{i}{3}$ est celle d'une similitude plane directe, donc g est une similitude plane directe. Son centre a une affixe vérifiant $z = \frac{-i}{3}z+1+\frac{i}{3}$, soit $\left(1+\frac{i}{3}\right)z=1+\frac{i}{3}$, soit $z = 1$. Donc le centre de g est le point I centre de s.

4. Pour déterminer l'affixe du point M_0 tel que $g(M_0) = O$, on résout l'équation $\frac{-i}{3}z+1+\frac{i}{3} = 0$,

soit $\frac{i}{3}z=1+\frac{i}{3}$,

soit $z = \frac{3+i}{3} \times \frac{3}{i} = \frac{3+i}{i} = 1 - 3i$.

5. Construction des points M_0 $(1 - 3i)$, M'_0 $(4 + 3i)$, M''_0 (-5), I :