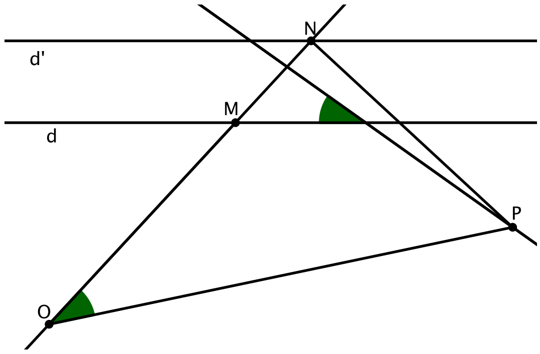
Corrigé Devoir maison n° 8 Terminale S spécialité

Exercice 1

On considère deux droites (d) et (d') parallèles et un point O dans le demi-plan ouvert de frontière (d) ne contenant pas (d'). A tout point M de (d), on construit les points N et P tels que : le point N est le point d'intersection de (d') et (OM); le triangle ONP est un triangle rectangle en N, de sens direct tel que NP = OM.

Soit H et K les projetés orthogonaux de O respectivement sur (d) et sur (d'). Alors le point N est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{\text{OK}}{\text{OH}} = \frac{\text{ON}}{\text{OM}}$.



Alors l'angle $\widehat{\text{PON}}$ vérifie : dans le triangle PON rectangle en N, $\tan(\widehat{\text{PON}}) = \frac{\text{PN}}{\text{ON}} = \frac{\text{OM}}{\text{ON}} = \frac{1}{k}$ qui est fixe. Donc l'angle $\widehat{\text{PON}}$ est fixe.

On peut considérer P comme l'image de M dans la similitude de centre O, de rapport $\frac{\text{OP}}{\text{OM}} = \frac{k\,\text{OP}}{\text{ON}} = \frac{k}{\cos(\widehat{\text{PON}})}$ et d'angle $\widehat{\text{PON}}$. Donc l'image de la droite (d) est une droite passant par P et faisant un angle $\widehat{\text{PON}}$ avec (d).

Exercice 2 : 1. a) Pour tout point M du plan d'affixe z, $(f \circ f)(z) = f\left(\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}\right) = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}} = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = z$. Donc $(f \circ f)(z) = z$, soit $f \circ f = \text{Id}$.

b) On a $\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$, et $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$, donc f est une similitude indirecte de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Il s'agit d'une isométrie, donc f est la composée d'une rotation et d'une réflexion.

On peut prendre la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, d'écriture complexe $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et la symétrie axiale s d'axe (O; $\vec{u}$) d'écriture complexe $z' = \bar{z}$. On a bien $f = r \circ s$.

Les points invariants par f vérifient $z = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}$; on pose $z = x + iy$, ainsi $x + iy = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy)$.

On obtient $x = \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$ et $y = \frac{-1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}x$, soit $\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}y$ et $\frac{3}{2}y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, soit $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, qui est l'équation d'une droite.

c) La rotation r est la composée de deux symétries axiales s et s' d'axes respectifs l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. En effet, l'écriture complexe de s' est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ et vérifient $0 = 0 + b$, soit $b = 0$.

Le point d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ est invariant par s', soit $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$, soit $a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On retrouve l'écriture complexe de f. Ainsi $f = s' \circ s \circ s = s'$ qui est la réflexion d'axe (d) d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

2. On considère l'application g qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$z' = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} \ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Les points invariants par g vérifient $z = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; on pose $z = x + iy$, ainsi

$x + iy = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy) \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On obtient $x = \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}$ et $y = \frac{-1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $x-\sqrt{3}y+1=0$ qui est l'équation d'une droite.

L'ensemble des points invariants par g est la droite d'équation $x-\sqrt{3}y+1=0$ ou $y = \frac{x+1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}$.

b) On considère la translation t de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'écriture complexe $z' = z \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alors $g = t\, o\, f$.

c) La translation t est la composée de deux symétries axiales s'' et s' d'axes (parallèles) respectifs la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}$ et la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. En effet, l'écriture complexe de s'' est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ et vérifient $-1 = -a + b$, soit $b = a - 1$ puisque le point d'affixe -1 est invariant par s'' .

Le point d'affixe $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est invariant par s'' , soit $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = a\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} + b$, soit $\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = a\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, soit

$a = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc l'écriture complexe de s'' est $z' = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \bar{z} \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui est l'écriture complexe de g.

Ainsi la composée $s''\, o\, s'$ a pour écriture complexe $z' = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = z \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

qui est l'écriture complexe de t.

Ainsi $g = t\, o\, f = s''\, o\, s'\, o\, f = s''\, o\, s'\, o\, s' = s''$ est la réflexion d'axe (d') d'équation $y = \frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}$.

d) L'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour affixe $z' = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc A est invariant par g.

e) Pour construire la droite (d'), il suffit de construire le point A comme point du cercle trigonométrique et d'abscisse $\frac{1}{2}$, puis de construire la parallèle à (d) passant par A.