

Exercice 1

1. a) On considère le nombre $N = x^2 - x + 4$ où x est un entier relatif.
Déterminer toutes les solutions de l'équation $N \equiv 0 \pmod{6}$.

Exercice 2

- Démontrer que pour tous entiers naturels a et b , le nombre $ab(a^2 - b^2)$ est un multiple de 3.
- Démontrer que pour tout entier naturel n , le nombre $5(n^2 + n)$ est un multiple de 10.

Exercice 3

On considère l'entier relatif x .

- a) Déterminer les restes de la division euclidienne de x^3 par 9 selon les valeurs de x .
b) En déduire que, pour tout entier naturel x ,
 $x^3 \equiv 0 \pmod{9}$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod{3}$;
 $x^3 \equiv 1 \pmod{9}$ équivaut à $x \equiv 1 \pmod{3}$;
 $x^3 \equiv 8 \pmod{9}$ équivaut à $x \equiv 2 \pmod{3}$.
- On considère les entiers relatifs x , y et z tels que $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9.
Montrer que l'un des nombres x , y ou z est divisible par 3.

Exercice 4

On considère le nombre $A = 2007^{2008} - 1$.

- Trouver le reste de la division euclidienne de A par 5.
- Trouver le reste de la division euclidienne de A par 17.
- En déduire que A est divisible par 85.