**<u>Corrigé Devoir surveillé n° 1 Terminale S spécialité</u>**

<u>Exercice 1 :</u> 1. a) On considère le nombre N = $x^2 - x + 4$ où $x$ est un entier relatif.
On cherche les solutions suivant les congruences de $x$ modulo 6 :
Si $x \equiv 0$ (6), alors $x^2 - x + 4 \equiv 4$ (6) ; si $x \equiv 1$ (6), $x^2 - x + 4 \equiv 4$ (6) ; Si $x \equiv 2$ (6), $x^2 - x + 4 \equiv 6 \equiv 0$ (6) ;
Si $x \equiv 3$ (6), $x^2 - x + 4 \equiv 4$ (6) ; si $x \equiv 4$ (6), $x^2 - x + 4 \equiv 4$ (6) ; Si $x \equiv 5$ (6), $x^2 - x + 4 \equiv 24 \equiv 0$ (6).
L'ensemble des solutions de l'équation N $\equiv 0$ (6) est $\{x \in \mathbb{Z}$ , $x = 6k + 1$ et $x = 6k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}\}$ .

<u>Exercice 2 :</u> 1. Pour tous entiers naturels $a$ et $b$, le nombre $ab(a^2 - b^2) = ab(a - b)(a + b)$.
On raisonne suivant les congruences de $a$ et $b$ modulo 3 : Si $a \equiv 0$ (3) ou $b \equiv 0$ (3), alors $ab(a - b)(a + b) \equiv 0$ (3) ;
Si $a \equiv 1$ (3), alors : si $b \equiv 1$ (3), alors $ab(a - b)(a + b) \equiv 0$ (3) ; si $b \equiv 2$ (3), alors $ab(a^2 - b^2) \equiv 2\times(-1)\times 3 \equiv 0$ (3) ;
Si $a \equiv 2$ (3), alors : si $b \equiv 1$ (3), alors $ab(a^2 - b^2) \equiv 2\times 1\times 3 \equiv 0$ (3); si $b \equiv 2$ (3), alors $ab(a^2 - b^2) \equiv 4\times 0\times 4 \equiv 0$ (3).
Dans tous les cas, on a bien $ab(a^2 - b^2) \equiv 0$ (3), donc $ab(a^2 - b^2)$ est un multiple de 3.

2. Pour tout entier naturel $n$ , $5(n^2 + n) = 5n(n + 1)$. On vérifie suivant les congruences de $n$ modulo 2 :
Si $n \equiv 0$ (2), soit $n$ pair, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ , et $5(n^2 + n) = 5\times(2k)\times(2k + 1) = 10k(2k + 1) \equiv 0$ (10) ;
Si $n \equiv 0$ (2), soit $n$ impair, alors $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ , et $5(n^2 + n) = 5\times(2k + 1)(2k + 2) = 10k(2k + 1)(k + 1) \equiv 0$ (10) ;
ainsi, pour tout entier naturel $n$ , $5(n^2 + n)$ est un multiple de 10.

<u>Exercice 3 :</u> 1. a) On raisonne suivant les congruences modulo 3:
Si $x \equiv 0$ (3), soit $x = 3k$ et $x^3 = 27k^3$ , alors $x^3 \equiv 0$ (9) ;
si $x \equiv 1$ (3), soit $x = 3k + 1$ et $x^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1$, alors $x^3 \equiv 1$ (9) ;
si $x \equiv 2$ (3), soit $x = 3k + 2$ et $x^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k) + 8$, alors $x^3 \equiv 8$ (9).
Donc les restes de la division euclidienne de $x^3$ par 9 sont 0, 1 ou 8.
b) On a vu les implications : Si $x \equiv 0$ (3), alors $x^3 \equiv 0$ (9) ; si $x \equiv 1$ (3), alors $x^3 \equiv 1$ (9) ; si $x \equiv 2$ (3), alors $x^3 \equiv 8$ (9).
Il reste à montrer la réciproque de ces implications :
Si $x^3 \equiv 0$ (9), alors $x = 3k$ et $x \equiv 0$ (3);
Si $x^3 \equiv 1$ (9), alors $x = 3k + 1$ et $x \equiv 1$ (3);
Si $x^3 \equiv 8$ (9), alors $x = 3k + 2$ et $x \equiv 2$ (3).

2. On considère les entiers relatifs $x$, $y$ et $z$ tels que $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9.
On a $x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0$ (9). Raisonnons par l'absurde: supposons que les trois nombres $x$, $y$ et $z$ ne sont pas divisibles par 3. Les restes dans la division par 9 du cube d'un nombre entier sont 0, 1 ou 8. Donc, ici les restes de $x^3$ , $y^3$ et $z^3$ ne peuvent être que 1 ou 8. La somme de trois nombres pris parmi 1 et 8 ne peut donner un multiple de 9 :
1 + 1 + 1 = 3; 1 + 1 + 8 = 10; 1 + 8 + 8 = 17; 8 + 8 + 8 = 24. Dans ce cas, la somme $x^3 + y^3 + z^3$ n'est pas divisible par 9.
Contradiction. Donc l'un des nombres $x$, $y$ ou $z$ est divisible par 3.

<u>Exercice 4 :</u> On considère le nombre A = $2007^{2008} - 1$.
1. On raisonne suivant les congruences modulo 5: $2007 \equiv 2$ (5) ; donc $2007^{2008} \equiv 2^{2008}$ (5).
On a $2^2 \equiv 4$ (5); $2^3 \equiv 3$ (5); $2^4 \equiv 1$ (5). Comme 2008 = 502×4, alors $2^{2008} = 2^{502\times 4} = \left(2^4\right)^{502} \equiv 1^{502} \equiv 1$ (5).
Donc A = $2007^{2008} - 1 \equiv 0$ (5). Ainsi, le reste de la division euclidienne de A par 5 est 0.

2. On raisonne suivant les congruences modulo 17: $2007 \equiv 1$ (17) car 2007 = 17×118 + 1;
donc $2007^{2008} \equiv 1^{2008} \equiv 1$ (17). Donc A = $2007^{2008} - 1 \equiv 0$ (17).
Ainsi, le reste de la division euclidienne de A par 17 est 0.

3. On peut en déduire que A est divisible par 5 et par 17, donc A est divisible par 5×17 = 85.