Devoir surveillé n° 2 Terminale S spécialité *8 novembre 2007*

Exercice 1 (6 points)

On considère les entiers naturels $M_n = 2^n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Trouver trois nombres premiers de la forme $2^n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x, $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$.

b) En déduire que si n n'est pas premier, alors M_n n'est pas premier.

3. Soit p un diviseur premier de M_n.

a) Montrer que $2^n \equiv 1$ (p).

b) Soit s le plus petit entier naturel n tel que $2^n \equiv 1$ (p), et $n = sq + r$ la division euclidienne de n par s.
Montrer que $2^r \equiv 1$ (p).

c) En déduire que s divise n.

Exercice 2 (8 points)

Partie A

Soit N un entier naturel impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$, où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et q ?

Partie B

On considère l'équation (E) : $a^2 - 250507 = b^2$ où a et b sont des entiers naturels.

1. Soit x un entier naturel. Donner dans un tableau, les restes possibles de x modulo 9, puis ceux de x^2 modulo 9.
2. Sachant que $b^2 = a^2 - 250507$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.
3. Montrer que les restes possibles de a modulo 9 sont 1 et 8.
4. a) Montrer que $a = 514$ est une solution possible.

b) En déduire une valeur de b.

5. En déduire une écriture de 250507 en un produit de deux facteurs.

Question hors barème : Les deux facteurs sont-ils premiers ? Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 3 (6 points)

On désigne par p un nombre premier supérieur ou égal à 7 et on considère le nombre $n = p^4 - 1$.

1. a) Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3.

b) En déduire que n est divisible par 3.

2. a) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$.

b) En déduire que n est divisible par 16.

3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de n par 5, démontrer que 5 divise n.
4. En déduire que n est divisible par 240.