Corrigé Devoir surveillé n° 2 Terminale S spécialité

Exercice 1 : On considère les entiers naturels $M_n = 2^n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1.Trois nombres premiers de la forme $2^n - 1$: si $n = 2$, $M_2 = 3$ est premier, $M_3 = 7$ est premier, $M_5 = 31$ est premier.

2. a) Pour tout entier naturel n et tout réel x ,

$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x - x^{n-1} - x^{n-2} - x - 1 = x^n - 1.$

b) Si n n'est pas premier, alors il existe deux entiers naturels p et q distincts de 1 tels que $n = pq$.

Alors, $M_n = 2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = \left(2^p\right)^q - 1 = (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + ... + 2^p + 1)$ qui est divisible par $2^p - 1 \neq 1$ puisque $p \neq 1$. Donc M_n n'est pas premier.

3. a) Si p est un diviseur premier de M_n , alors il existe un entier naturel q tel que $M_n = pq$.

Donc $2^n = pq + 1$, et $2^n \equiv 1\ (p)$.

b) On sait que $2^s \equiv 1\ (p)$, et $n = sq + r$ la division euclidienne de n par s, donc $0 \leqslant r < s$.

$M_n = 2^n - 1 = 2^{sq+r} - 1 = (2^s)^q \times 2^r - 1 \equiv 2^r - 1 \equiv 0\ (p)$. Donc $2^r \equiv 1\ (p)$.

c) Comme $0 \leqslant r < s$ *et* s est le plus petit entier tel que $2^s \equiv 1\ (p)$, alors $r = 0$ et s divise n.

Exercice 2 : Partie A : 1. Démonstration par l'absurde: supposons que a et b aient la même parité.

Alors a^2 et b^2 ont la même parité, et donc N est pair; car la différence de deux entiers de même parité est paire.

Comme N est impair, ceci est impossible. Donc a et b n'ont pas la même parité.

2. Il suffit d'écrire $N = (a - b)(a + b) = pq$.

3. Si a et b n'ont pas la même parité, alors $p = a - b$ et $q = a + b$ sont impairs.

En effet : $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$, avec k et k' dans $\mathbb{N}$, alors $p = a - b = 2(k - k') + 1$ et $q = a + b = 2(k + k') + 1$.

Partie B : On considère l'équation (E) : $a^2 - 250507 = b^2$ où a et b sont des entiers naturels.

1. Dans un tableau, les restes possibles de x modulo 9, puis ceux de x^2 modulo 9.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1

2. Sachant que $b^2 = a^2 - 250507$, les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250507$ sont 0, 1, 4 et 7; sachant que $250507 \equiv 1\ (9)$, alors $a^2 - 250507 \equiv a^2 - 1 \equiv b^2\ (9)$, soit $a^2 \equiv b^2 + 1\ (9)$, et les restes possibles modulo 9 de a^2 sont 1, 2, 5 et 8.

3. Parmi les restes possibles modulo 9 de a^2 , le seul reste d'un carré est 1. Et d'après le tableau, les restes possibles de a modulo 9 sont 1 et 8.

4. a) $a = 514 = 9 \times 57 + 1 \equiv 1\ (9)$ est une solution possible.

b) Dans ce cas, $b^2 = a^2 - 250507 = 514^2 - 250507 = 13689$ et $b = \sqrt{13689} = 117$.

5. On peut écrire $250507 = (a - b)(a + b) = 397 \times 631$.

Question hors barème : Les deux facteurs sont des nombres premiers. Cette décomposition est unique puisque c'est la décomposition en facteurs premiers de 250507.

Exercice 3 : 1. a) Pour tout entier naturel m, m s'écrit $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$. Si p est premier supérieur à 7, alors p n'est pas un multiple de 3, et p s'écrit $3k + 1$ ou $3k + 2 \equiv -1\ (3)$. Donc p est congru à -1 ou à 1 modulo 3.

b) Ainsi, $p^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1\ (3)$ ou $p^4 \equiv 1^4 \equiv 1\ (3)$. Donc $n = p^4 - 1 \equiv 0\ (3)$. Et n est divisible par 3.

2. a) Comme p est impair, il existe un entier naturel k tel que $p = 2k + 1$.

D'où $p^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1)$.

b) On sait que pour tout entier naturel k, un des entiers consécutifs k ou $k + 1$ est pair, donc $k(k + 1)$ est pair égal à $2d$, d'où $p^2 - 1 = 4k(k + 1) = 8d$ est divisible par 8. De plus, comme p est impair, p^2 aussi et $p^2 + 1$ est pair $= 2d'$.

Donc $n = p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 16dd'$ et n est divisible par 16.

3. Les restes possibles de la division euclidienne de p par 5 sont 1, 2, 3 ou 4. Puisque p n'est pas un multiple de 5.

Si $p \equiv 1\ (5)$, alors $p^4 \equiv 1\ (5)$ et $n \equiv 0\ (5)$. Si $p \equiv 2\ (5)$, alors $p^4 \equiv 16 \equiv 1\ (5)$ et $n \equiv 0\ (5)$.

Si $p \equiv 3\ (5)$, alors $p^4 \equiv 81 \equiv 1\ (5)$ et $n \equiv 0\ (5)$. Si $p \equiv 4\ (5)$, alors $p^4 \equiv 256 \equiv 1\ (5)$ et $n \equiv 0\ (5)$.

Ainsi 5 divise n.

4. On sait que n est divisible par 3, 16 et 5 qui sont premiers entre eux, donc n est divisible par $3 \times 16 \times 5 = 240$.