Devoir surveillé n° 3 Terminale S spécialité *20 décembre 2007*

Exercice 1 (6 points)

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver, à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. a) Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17.

b) En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Exercice 2 (7 points)

A. Question de cours : Montrer que, pour tous entiers a et b, PGCD(a; b) = PGCD(a; $a - b$).
En déduire que pour tout entier k, PGCD($k + 1$; k) = 1.

B. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par
$x_0 = 3$ et $x_{n+1} = 2x_n - 1$;
$y_0 = 1$ et $y_{n+1} = 2y_n + 3$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. Déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD(x_{n+1} ; x_n).
3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

b) En déduire y_n en fonction de n.

4. Soit d_n le PGCD de x_n et y_n. Montrer que d_n divise 5.
5. Déterminer n pour que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 3 (6 points)

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$ où $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a; b)$ d'entiers vérifiant $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = -5b + 2 \end{cases}$.

a) Montrer que le couple $(a; b)$ est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division euclidienne de N par 40 ?