Corrigé Devoir surveillé n° 3 Terminale S spécialité

Exercice 1 : 1. On sait que $4 \equiv 1$ (3), donc pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1^n \equiv 1$ (3).
2. Les nombres 4 et 29 étant premiers entre eux, d'après le petit théorème de Fermat, $4^{28} \equiv 1$ (29), donc $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. a) Pour $n = 1$, $4 \equiv 4$ (17). Pour $n = 2$, $4^2 \equiv 16$ (17). Pour $n = 3$, $4^3 = 64 \equiv 13$ (17). Pour $n = 4$, $4^4 = 256 \equiv 1$ (17).
b) Donc, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} = \left(4^4\right)^k \equiv 1^k \equiv 1$ (17), donc $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour $n = 1$, $4 \equiv 4$ (5). Pour $n = 2$, $4^2 \equiv 1$ (5). Donc, pour tous les entiers naturels n pairs, $4^n = \left(4^2\right)^k \equiv 1^k \equiv 1$ (5), et le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5.
5. D'après les questions précédentes, les nombres premiers 3, 5, 17 et 29 sont des diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Exercice 2 : A. Question de cours : Montrons que l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de a et $a - b$:
Soit $d \in D(a; b)$; alors il existe des entiers k et k' tels que $a = kd$ et $b = k'd$, donc $a - b = kd - k'd = d(k - k')$, donc d divise $a - b$, donc $d \in D(a; a - b)$. Ainsi $D(a; b) \subset D(a; a - b)$.
Soit $d \in D(a; a - b)$; alors il existe des entiers k et k' tels que $a = kd$ et $a - b = k'd$, donc
$b = a - (a - b) = kd - k'd = d(k - k')$, donc d divise b, donc $d \in D(a; b)$. Ainsi $D(a; a - b) \subset D(a; b)$.
Donc $D(a; b) = D(a; a - b)$. Leur plus grand élément est le même, soit $PGCD(a; b) = PGCD(a; a - b)$.
D'où, pour tout entier k, $PGCD(k + 1; k) = PGCD(k ; 1) = 1$.

B. 1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$:
Initialisation : pour $n = 0$, $2^{0+1} + 1 = 3 = x_0$.
Hérédité : supposons que pour une valeur de n, $x_n = 2^{n+1} + 1$ et montrons que $x_{n+1} = 2^{n+2} + 1$:
$x_{n+1} = 2x_n - 1 = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. Pour tout entier naturel n, le $PGCD(x_{n+1} ; x_n) = PGCD(2x_n - 1; x_n) = PGCD(x_n - 1; x_n) = 1$ en utilisant la partie A.
3. a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$:
Initialisation : pour $n = 0$, $2x_0 - y_0 = 2\times 3 - 1 = 5$.
Hérédité : supposons que pour une valeur de n, $2x_n - y_n = 5$ et montrons que $2x_{n+1} - y_{n+1} = 5$:
$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - (2y_n + 3) = 2(2x_n - y_n) - 5 = 2\times 5 - 5 = 5$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.
b) Donc, pour tout entier naturel n, $y_n = 2x_n - 5 = 2(2^{n+1} + 1) - 5 = 2^{n+2} - 3$.
4. Soit d_n le PGCD de x_n et y_n. Alors d_n divise toute combinaison linéaire de x_n et y_n, donc divise $2x_n - y_n = 5$.
5. $d_n = PGCD(x_n ; y_n) = PGCD(x_n ; 2x_n - 5) = PGCD(x_n ; x_n - 5) = PGCD(x_n ; 5)$. Comme 5 est un nombre premier, si 5 divise x_n, alors $d_n = 5$, sinon $d_n = 1$. Donc x_n et y_n soient premiers entre eux si et seulement si $d_n = 1$ si et seulement si 5 ne divise pas x_n. 5 divise x_n, si et seulement si $x_n \equiv 0$ (5) si et seulement si $2^{n+1} \equiv -1 \equiv 4$ (5) si et seulement si $2^n\times 2 \equiv 2\times 2$ (5), et en multipliant par 3, on obtient $2^n \equiv 2$ (5). En regardant les puissances de 2 modulo 5, on trouve que $n = 4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Donc, x_n et y_n soient premiers entre eux si et seulement si $n \neq 4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : 1. a) Une solution particulière de l'équation (E) est $x_0 = 2$ et $y_0 = -3$.
b) Soit $(x; y)$ un couple solution de (E). Alors $8x + 5y = 8x_0 + 5y_0$, soit $8(x - x_0) = 5(y_0 - y)$. D'après le théorème de Gauss, comme 8 et 5 sont premiers entre eux, 5 divise $x - x_0$ donc il existe un entier k tel que $x - x_0 = 5k$,
soit $x = x_0 + 5k = 2 + 5k$. Et $8(5k) = 5(y_0 - y)$, soit $8k = y_0 - y$, soit $y = y_0 - 8k = -3 - 8k$.
L'ensemble solution de l'équation (E) est $\{(2 + 5k; -3 - 8k) , k \in \mathbb{Z}\}$.
2. a) On sait que $N = 8a + 1 = -5b + 2$, soit $8a + 5b = 2 - 1 = 1$, donc le couple $(a; b)$ est solution de (E).
b) Alors le couple $(a; b)$ est de la forme $(2 + 5k; -3 - 8k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $N = 8a + 1 = 8(2 + 5k) + 1 = 40k + 17$.
Ainsi le reste, dans la division euclidienne de N par 40 est 17.