

Exercice 1 : 1. Les éléments caractéristiques de s : Le rapport de s est le module de $1 + i\sqrt{3}$: $|1 + i\sqrt{3}| = 2$.

L'angle de s est un argument de $1 + i\sqrt{3}$: $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Le centre Ω a pour affixe ω vérifiant $\omega = (1 + i\sqrt{3})\omega + 2\sqrt{3}$, soit $\omega(-i\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$, soit $\omega = \frac{2\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = \frac{2}{-i} = 2i$.

Ainsi, la similitude s a un rapport égal à 2, un angle de $\frac{\pi}{3}$, et le centre a pour affixe $2i$.

2. L'image A' du point A d'affixe $1 + i$ par s est déterminé par : $z' = (1 + i\sqrt{3})(1 + i) + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$.

3. Si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par s , alors $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}$, et la similitude réciproque de s vérifie

$z = (1 + i\sqrt{3})z' + 2\sqrt{3}$; soit $z'(1 + i\sqrt{3}) = z - 2\sqrt{3}$; soit

$$z' = \frac{z - 2\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(z - 2\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{4} = \frac{z(1 - i\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} + 6i}{4} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4}z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}.$$

Exercice 2 1. Soit $z' = az + b$ l'écriture complexe de s .

Comme $s(A) = C$, alors $5 + i = ai + b$ et comme $s(B) = D$, alors $1 + i = -ai + b$. On obtient le système:

$$\begin{cases} ai + b = 5 + i \\ -ai + b = 1 + i \end{cases}; \text{ on trouve } \begin{cases} a = 2 - 2i \\ b = 3 - i \end{cases}. \text{ L'écriture complexe de } s \text{ est } z' = (2 - 2i)z + 3 - i.$$

2. Les éléments caractéristiques de s : Le rapport de s est le module de $2 - 2i$: $2\sqrt{2}$.

L'angle de s est un argument de $2 - 2i$: $\arg(2 - 2i) = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$.

Le centre Ω a pour affixe ω vérifiant $\omega = (2 - 2i)\omega + 3 - i$, soit $\omega = -1 - i$.

3. a) Soit E le point d'affixe $-1 + i$ et $F = s(E)$.

On a $AE = |z_E - z_A| = |-1 + i - i| = 1$; $BE = 1$ et $AB = \sqrt{2}$. Comme $AE^2 + BE^2 = AB^2$, le triangle ABE est rectangle isocèle en E .

b) Le triangle CDF est l'image du triangle ABE par la similitude s , donc CDF est semblable à ABE , donc rectangle isocèle en F .

Exercice 3 1. Restitution organisée de connaissances :

Une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan:

Soient A, B, C ces trois points non alignés invariants par s . Soit M un point quelconque du plan. Si $s(M) = M$, alors s est l'identité du plan. Sinon, soit $M' = s(M)$ distinct de M . Comme $s(A) = A$ et $s(B) = B$, alors le rapport k de s vérifie $AB = kAB$, donc $k = 1$. Ainsi $AM' = AM$, $BM' = BM$ et $CM' = CM$. Donc les trois points A, B, C sont sur la médiatrice de $[MM']$, donc ils sont alignés, ce qui est absurde. Donc $s = \text{Id}$.

2. a) $ABCD$ est un carré direct de centre O , donc $(\vec{AB}; \vec{AO}) = \frac{\pi}{4}$. Et $AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$.

Donc l'angle de la similitude s est $\frac{\pi}{4}$ et le rapport est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) L'image de C par s est le point D , car $(\vec{AC}; \vec{AD}) = \frac{\pi}{4}$. Et $AD = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$.

c) Les images des points B et C par s sont les points O et D , donc l'image de la droite (BC) par s est la droite (OD) .

d) L'image du milieu I de $[BC]$ par s est le milieu du segment $[OD]$.

e) Dans le repère orthonormé direct $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$, les affixes de A, B, C, D et O sont respectivement $0, 1, 1 + i, i$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. L'écriture complexe de s dans le repère orthonormé direct $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$ est de la forme $z' = az + b$.

Comme A est le centre de la similitude, $b = 0$. Et $a = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1+i}{2}$. Donc $z' = \frac{1+i}{2} z$.