Exercice 1 (11 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $3i$ et 6.

Partie A

1. Montrer qu'il existe une unique similitude directe qui transforme A en O et O en B.
Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte qui transforme A en O et O en B.

Partie B

1. Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -2i\,\bar{z} + 6$. Montrer que f possède un point invariant et un seul. On note K ce point.
2. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$. On pose $g = f \circ h$.

a) Montrer que g est une isométrie laissant invariant le point K.

b) On désigne par M'' l'image du point M d'affixe z par la transformation g.
Montrer que l'écriture complexe de g est $z'' = -i\,\bar{z} + 2 + 2i$ où z'' est l'affixe de M''.

c) Montrer qu'il existe sur l'axe $(O; \vec{v})$ un unique point invariant par g. On le note L.
Reconnaître alors la transformation g.

d) En déduire que la transformation f est la composée d'une homothétie h' suivie d'une réflexion d'axe (KL).
Préciser les éléments caractéristiques de h'.

3. Déterminer les droites (d) telles que f((d)) et (d) soient parallèles.

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1 + 2i$, $-1 - i$, $1 - 3i$, $4 - i$.

Les points L et J sont les milieux respectifs des côtés [AD] et [BC].

1. Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte s telle que s(D) = A et s(B) = C.
2. Vérifier que L et J sont des points fixes de s.
3. Quelle est la nature de s ?

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD. M est un point de la droite (CD); la perpendiculaire à (AM) passant par A coupe la droite (BC) en N. Le point I est le milieu de [MN].

1. Démontrer que le triangle AMN est isocèle.
2. Démontrer qu'il existe une similitude directe s telle que s(M) = I. Préciser les éléments caractéristiques de s.
3. Quelle est l'ensemble décrit par I lorsque M décrit la droite (CD) ?