Corrigé Devoir surveillé n° 5 Terminale S spécialité

Exercice 1: Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O; $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ).
On considère les points A et B d'affixes respectives $3i$ et 6.
**Partie A:** 1. Les points A, O et B étant distincts, il existe une unique similitude directe qui transforme A en O et O en B. Soit $s$ cette similitude d'écriture complexe $z' = az + b$. On a alors : puisque $s$(A) = O, $0 = 3ia + b$ et $s$(O) = B, $6 = b$, donc $a = 2i$ et $b = 6$. Ainsi l'écriture complexe de $s$ est $z' = 2iz + 6$. Le rapport est $|2i| = 2$,

l'angle est $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ , et le centre a pour affixe $\omega$ vérifiant $\omega = 2i\omega + 6$, soit $\omega(1 - 2i) = 6$,

soit $\omega = \frac{6}{1-2i} = \frac{6(1+2i)}{5} = \frac{6+12i}{5}$ .
2. Les points A, O et B étant distincts, il existe une unique similitude indirecte qui transforme A en O et O en B.
Soit $s'$ cette similitude d'écriture complexe $z' = a\,\bar{z} + b$. On a alors : puisque $s$(A) = O, $0 = -3ia + b$ et $s$(O) = B, $6 = b$, donc $a = -2i$ et $b = 6$. Ainsi l'écriture complexe de $s'$ est $z' = -2i\,\bar{z} + 6$.

**Partie B:** 1. Un point invariant par $f$ vérifie $z = -2i\,\bar{z} + 6$, soit en posant $z = x + iy$,
$\begin{cases} x=-2y+6 \\ y=-2x \end{cases}$, soit $\begin{cases} x=-2(-2x)+6 \\ y=-2x \end{cases}$ et on trouve $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$.
Ainsi $f$ possède un unique point invariant K d'affixe $-2 + 4i$.
2. Soit $h$ l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ . On pose $g = f \circ h$.
a) On sait que K est le point invariant de $f$ , K est aussi le point invariant de $h$, donc $g(\text{K}) = f(h(\text{K})) = f(\text{K}) = \text{K}$. De plus, le rapport de $f$ est $|-2i| = 2$, celui de $h$ est $\frac{1}{2}$ , donc celui de $g$ est le produit de ces deux rapport, soit 1. Donc $g$ est une isométrie laissant invariant le point K.
b) On désigne par M'' l'image du point M d'affixe $z$ par la transformation $g$ et M' d'affixe $z'$ l'image de M par $h$.
Alors $g(\text{M}) = f(h(\text{M})) = f(\text{M'}) = \text{M''}$. L'écriture complexe de $h$ est $z' + 2 - 4i = \frac{1}{2}(z + 2 - 4i)$.

Ainsi l'écriture complexe de $g$ est $z'' = -2i\,\bar{z}' + 6 = -2i\left(\frac{1}{2}(\bar{z} + 2 + 4i) - 2 - 4i\right) + 6 = -2i\left(\frac{1}{2}\bar{z} - 1 - 2i\right) + 6 =$
$-i\,\bar{z} + 2i - 4 + 6 = -i\,\bar{z} + 2 + 2i$ .
c) Un point invariant par $g$ vérifie $z = -i\,\bar{z} + 2 + 2i$, soit en posant $z = x + iy$, $\begin{cases} x=-y+2 \\ y=-x+2 \end{cases}$, soit $y = -x + 2$ qui est l'équation d'une droite du plan. Il existe sur l'axe (O; $\vec{v}$ ) un unique point invariant par $g$ : L(0; 2). La transformation $g$ est la réflexion d'axe la droite d'équation $y = -x + 2$ passant par les points K et L, donc $g$ est la réflexion d'axe (KL).
d) Comme $g = f \circ h$ , alors $f = g \circ h^{-1}$ où $h^{-1}$ désigne l'homothétie réciproque de $h$. Ainsi, $f$ est la composée d'une homothétie $h' = h^{-1}$ suivie d'une réflexion d'axe (KL). Le centre de $h'$ est K, et le rapport de $h'$ est l'inverse de celui de $h$, soit 2.
3. L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle. L'image d'une droite par une réflexion est une droite, et ces deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont parallèles à l'axe de la réflexion. Donc les droites (d) telles que $f$((d)) et (d) soient parallèles, sont les droites parallèles à (KL).

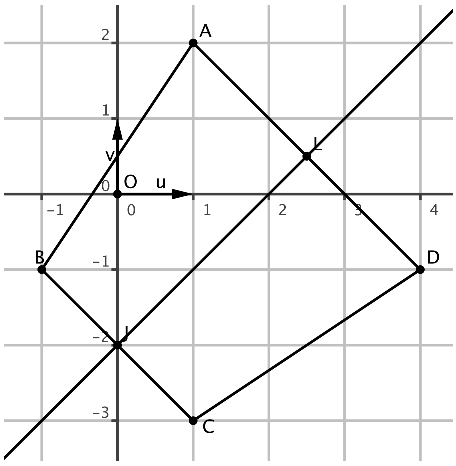
Exercice 2 : Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O; $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ). On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $1 + 2i$, $-1 - i$ , $1 - 3i$ , $4 - i$. Les points L et J sont les milieux respectifs des côtés [AD] et [BC].
1. Les points A, B, C et D étant distincts, il existe une unique similitude indirecte $s$ telle que $s$(D) = A et $s$(B) = C. Son écriture complexe est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$.
On a alors : puisque $s$(D) = A, $1 + 2i = a(4 + i) + b$ et $s$(B) = C, $1 - 3i = a(-1 + i) + b$. En soustrayant les deux équations, on trouve $5i = a(5)$, soit $a = i$ et $b = 1 + 2i - i(4 + i) = 2 - 2i$. Ainsi l'écriture complexe de $s$ est $z' = i\,\bar{z} + 2 - 2i$. Le rapport est $|i| = 1$ (donc $s$ est une isométrie), l'angle est $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ .

2. L'affixe de L est $z_L = \frac{z_A+z_D}{2} = \frac{1+2i+4-i}{2} = \frac{5+i}{2}$ et

l'affixe de J est $z_J = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{-1-i+1-3i}{2} = -2i$. L'image de L par $s$ a pour affixe $z' = i\frac{5-i}{2} + 2 - 2i = \frac{5i+1+4-4i}{2} = \frac{5+i}{2} = z_L$, donc L est un point fixe de $s$.

L'image de J par $s$ a pour affixe $z' = i(2i) + 2 - 2i = -2i = z_J$, donc J est un point fixe de $s$.

3. La similitude indirecte $s$ est une isométrie ayant deux points invariants, elle n'est pas l'identité, c'est donc la réflexion d'axe (LJ).




<u>Exercice 3</u> : Dans le plan orienté, on considère le carré direct ABCD. M est un point de la droite (CD); la perpendiculaire à (AM) passant par A coupe la droite (BC) en N. Le point I est le milieu de [MN].

1. On considère la rotation $r$ de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{2}$. On a $r$(D) = B, donc $r$((CD) = (BC), et donc $r$(M) = N. Donc AM = AN et $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AN}) = \frac{-\pi}{2}$. Donc le triangle AMN est rectangle et isocèle en A.

2. Dans le triangle AMN rectangle et isocèle en A, I est le milieu de [MN], donc (AI) est une médiane et la bissectrice de l'angle $\widehat{MAN}$, donc $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AI}) = \frac{-\pi}{4}$. De plus, AI = $\frac{1}{2}$ MN = $\frac{1}{2}$ AM $\sqrt{2}$. Donc $\frac{AI}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On considère la similitude directe $s$ de centre A, d'angle $\frac{-\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Alors $s$(M) = I.

3. Lorsque M décrit la droite (CD), I décrit la droite (BD), puisque $s$(CD) = (BD).