Lycée F. MISTRAL AVIGNON

BAC BLANC 2009

Epreuve de MATHEMATIQUES

Série S

CALCULATRICE AUTORISEE

DUREE : 4 heures

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>EXERCICE N°1 (commun à tous les élèves)</u> (6 *points*)

1. Résoudre l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ (E), dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ (E′)

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$ soit solution de (E′).

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est solution de l'équation (E′) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E′).

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$.

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note C la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

a. Étudier les positions relatives de C et Γ.

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

<u>EXERCICE N°2 (commun à tous les élèves)</u> (5 *points*)

Partie A. Démonstration de cours (1 point)

<u>Prérequis</u> : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

« *Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0. La droite (T) est tracée sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).

2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

3. **a.** Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE N°3 (élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques) (5 *points*)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_I = 3 + i$. On note (C) le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle (C) en A.

À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-5}{z-1}$.

Le point M′ est appelé l'image de M.

Partie A

1. Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I′ image de I. Vérifier que I′ appartient à (C).

2. a. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $\text{OM}' = \dfrac{\text{MB}}{\text{MA}}$.

b. Justifier que pour tout point M distinct de A et B, on a : $(\overrightarrow{\text{OA}} ; \overrightarrow{\text{OM}'}) = (\overrightarrow{\text{MA}} ; \overrightarrow{\text{MB}})$

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ). On cherche à construire géométriquement son image *M′*.

1. Démontrer que M′ appartient à (C).

2. On note (d) la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la tangente (T). (d) recoupe (C) en N.

a. Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles. Après avoir justifié que : $(\overrightarrow{\text{AO}} ; \overrightarrow{\text{AN}}) = (\overrightarrow{\text{AM}} ; \overrightarrow{\text{AB}})$ démontrer que :$(\overrightarrow{\text{OA}} ; \overrightarrow{\text{ON}}) = (\overrightarrow{\text{MA}} ; \overrightarrow{\text{MB}})$.

b. En déduire une construction de M′.

EXERCICE N°3 (élèves ayant choisi la spécialité mathématiques) (5 *points*)

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (−7 ; −3) est solution de (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire le couple d'entiers relatifs (u ; v) solution de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule $11x + 8$
- on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25$ (modulo26) ;
25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettre W.

2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.

a. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j , on a :

$$11x \equiv j \text{ (modulo 26) équivaut à } x \equiv 19j \text{ (modulo 26)}.$$

b. En déduire un procédé de décodage. Décoder la lettre W.

<u>EXERCICE N°4 (commun à tous les élèves)</u> (4 *points*)

Soit $v = (v_n)_{n > 0}$ une suite.

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = e^{-v_n} + 1$.

Partie A

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte. Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie. Une bonne réponse donne 0,75 *point, une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point et l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Tout total négatif est ramené à zéro.*

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien. Si $v_0 = \ln a$ alors :

a. $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$; **b.** $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$; **c.** $u_0 = -a + 1$; **d.** $u_0 = e^{-a} + 1$.

2. Si v est strictement croissante, alors :

a. u est strictement décroissante et majorée par 2
b. u est strictement croissante et minorée par 1
c. u est strictement croissante et majorée par 2
d. u est strictement décroissante et minorée par 1

3. Si v diverge vers $+\infty$, alors :

a. u converge vers 2 ;
b. u diverge vers $+\infty$;
c. u converge vers 1 ;
d. u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$.

4. Si v est majorée par 2, alors :

a. u est majorée par $1 + e^{-2}$;
b. u est minorée par $1 + e^{-2}$;
c. u est majorée par $1 + e^{2}$;
d. u est minorée par $1 + e^{2}$.

Partie B (<u>facultative</u>). (1 point)

Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a : $\ln(u_n) + v_n > 0$.

ANNEXE