CORRIGÉ Bac Blanc Terminale S Mars 2009

Exercice n°1 :

1. Soit l'équation : $2y' + y = 0$ (E), d'inconnue une fonction dérivable sur ℝ. Cette équation peut se mettre sous la forme : $y' = -\frac{1}{2}y$ qui admet comme ensemble solution dans ℝ, l'ensemble des fonctions :

$x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x}$ où C est une constante réelle quelconque.

2. $2y' + y = e^{-\frac{1}{2}x}(x + 1)$ (E').

a. f est dérivable sur ℝ car produit ($U\times V$)et composée ($U = e^u$ avec $u = -\frac{1}{2}x$) de fonctions dérivables et

$f'(x) = U'V + UV' = u'e^u\times V + UV' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(mx^2 + px) + e^{-\frac{1}{2}x}(2mx + p)$.

f solution de (E') $\Leftrightarrow 2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(x + 1)$

$\Leftrightarrow -e^{-\frac{1}{2}x}(mx^2 + px) + 2e^{-\frac{1}{2}x}(2mx + p) + e^{-\frac{1}{2}x}(mx^2 + px) = e^{-\frac{1}{2}x}(x + 1) \Leftrightarrow 2e^{-\frac{1}{2}x}(2mx + p) = e^{-\frac{1}{2}x}(x + 1) \Leftrightarrow$ $2(2mx + p) = x + 1$ (en simplifiant par $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$) $\Leftrightarrow 4mx + 2p = x + 1$. Cette équation est valable pour tout réel x, donc par identification des coefficients, on trouve : $\begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} m = 0{,}25 \\ p = 0{,}5. \end{cases}$

Donc la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x)$ est la solution cherchée de (E').

b. Soit g une fonction dérivable sur ℝ. $g - f$ est solution de (E) $\Leftrightarrow 2(g - f)' + (g - f) = 0 \Leftrightarrow$ $2(g' - f') + (g - f) = 0$ (par linéarité de la dérivation) $\Leftrightarrow 2g' - 2f' + g - f = 0 \Leftrightarrow 2g' + g = 2f' + f$ $\Leftrightarrow 2g' + g = e^{-\frac{1}{2}x}(x + 1)$ car f solution de (E') $\Leftrightarrow g$ est solution de (E').

D'après ce qui précède : g est solution de (E') $\Leftrightarrow g - f$ est solution de (E) $\Leftrightarrow g(x) - f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow$

$g(x) = f(x) + Ce^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x) + Ce^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x + 4C)$ où C est un réel quelconque.

3. Soit $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x)$; h n'est autre que la fonction f vue au 2. a.. Elle est donc dérivable sur ℝ et on a :

$2h'(x) + h(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(x + 1) \Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2}[e^{-\frac{1}{2}x}(x + 1) - h(x)] \Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{2}[e^{-\frac{1}{2}x}(x + 1) - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x)] \Leftrightarrow$

$h'(x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}(4x + 4 - x^2 - 2x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}(-x^2 + 2x + 4) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 - 2x - 4)$.

Or $e^{-\frac{1}{2}x} > 0\ \forall x \in$ ℝ et $-\frac{1}{8} < 0$, donc $h'(x)$ est du signe contraire de $(x^2 - 2x - 4)$. $\Delta = (-2)^2 - 4(-4) = 20$ donc cette expression du second degré admet 2 racines : $\frac{2+\sqrt{20}}{2} = 1+\sqrt{5}$ et $1-\sqrt{5}$.

On en déduit que la fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1-\sqrt{5}]$ et sur $[1+\sqrt{5} ; +\infty[$ et strictement croissante sur $[1-\sqrt{5} ; 1+\sqrt{5}]$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$x^2 - 2x - 4$		+	0	−	0	+	
$h'(x)$		−	0	+	0	−	

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 + 2x) = +\infty$ car : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2}x = +\infty$, on pose $X = -\frac{1}{2}x$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \frac{1}{4}e^X = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 + 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ car à l'infini la limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré. On conclut avec le théorème général sur produit de limites.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2+2x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x^2 e^{\frac{-1}{2}x}\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}x\right)^2 e^{\frac{-1}{2}x}\left(1+\frac{2}{x}\right) = 0 \text{ car : } \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2}x = -\infty,$$

on pose $X = -\frac{1}{2}x$ et $\lim_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0$ (limite usuelle) ; $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = 1$ et théorème général sur produit de limites.

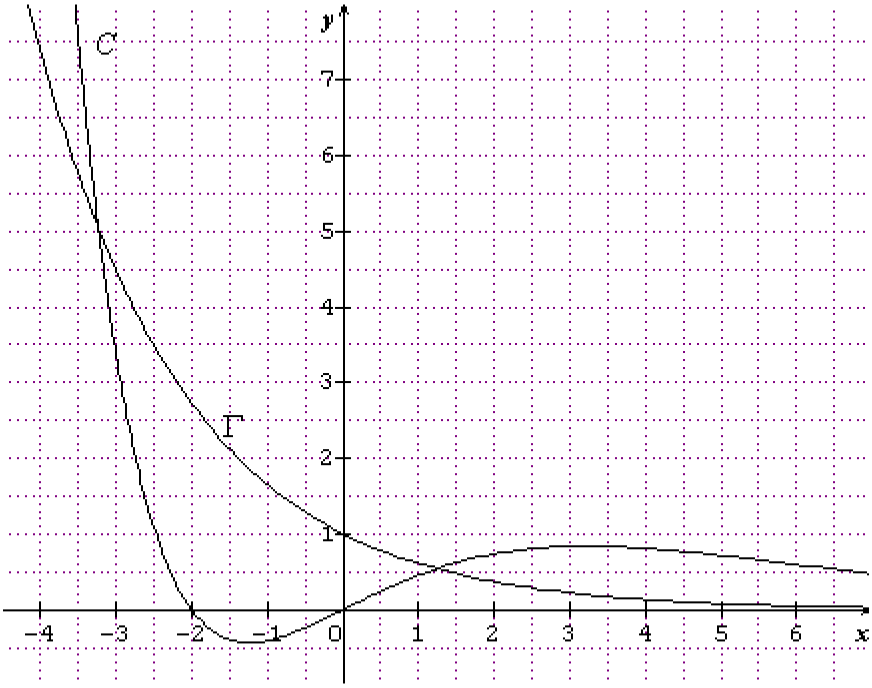
5. a. Étudions le signe de $h(x) - e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2+2x) - e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2+2x-4)$

qui est du signe de x^2+2x-4 car $e^{-\frac{1}{2}x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{4} > 0$. $\Delta = 2^2 - 4(-4) = 20$ donc cette expression du second degré admet 2 racines : $\frac{-2+\sqrt{20}}{2} = -1+\sqrt{5}$ et $-1-\sqrt{5}$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2+2x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que la courbe C est au dessus de Γ sur $]-\infty ; -1-\sqrt{5}]$ et sur $[-1+\sqrt{5} ; +\infty[$ et la courbe C est au dessous de Γ sur $[-1-\sqrt{5} ; -1+\sqrt{5}]$. De plus, C et Γ se coupent aux points d'abscisses $-1-\sqrt{5}$] et $-1+\sqrt{5}$.

b. Représentation graphique :



Exercice n°2 :

Partie B

1. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions composées de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ et

$f'(x) = \frac{1}{1+x} + x > 0$, car $\forall x \in [0 ; +\infty[: x \geq 0$

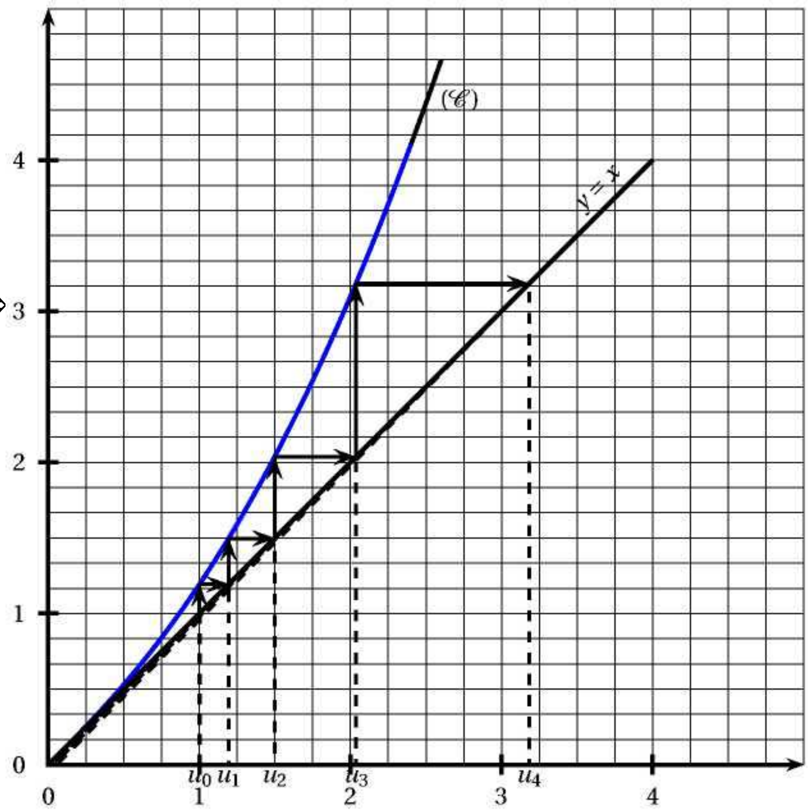
$\Leftrightarrow 1 + x \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+x} \leq 1$.

La fonction f est donc croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$.

Partie C

1. En se servant de la courbe (C) et de la droite d'équation $y = x$, on obtient à partir de $u_0 = 1$:



2. Ce cheminement suggère que la suite est croissante et qu'elle n'est pas bornée (sa limite serait $+\infty$).

3. a. Soit la proposition P_n : $u_n \geq 1$.

<u>Initialisation</u> : on a $u_0 = 1 \geq 1$: vraie.

<u>Hérédité</u> : soit un naturel p tel que $u_p \geq 1$; la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$donc :

$f(u_p) \geq f(1) \quad \Leftrightarrow u_p + 1 \geq 1$, car $f(1) = \ln(1+1) + \dfrac{1}{2} \approx 0{,}69 + 0{,}5 \geq 1$.

Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

1. On démontre de même par récurrence que la suite (u_n) est croissante :

<u>Initialisation</u> : on a : $u_0 = 1 \leq 0{,}69 + 0{,}5 \approx \ln(1+1) + \dfrac{1}{2} = f(1) = f(u_0) = u_1$: donc $u_0 \leq u_1$ vraie.

<u>Hérédité</u> : soit un entier naturel non nul p tel que $u_{p-1} \leq u_p$;
la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc : $f(u_{p-1}) \leq f(u_p) \quad \Leftrightarrow u_p \leq u_{p+1}$.

Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

c. Quel que soit $A \in \mathbb{N}$, étant donné qu'il est admis que la courbe (C) est au-dessus de la droite d'équation $y = x$, le terme $u_A > A - 1$ ainsi que tous ses successeurs : la suite n'est donc pas majorée.

d. La suite est croissante et non majorée : elle diverge vers $+\infty$.

Exercice n°3 (élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques) *:*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_I = 3 + i$. On note (C) le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de [AB] et (T) la tangente au cercle (C) en A.

À tout point M d'affixe z, différent de A, on associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-5}{z-1}$.

Le point M′ est appelé l'image de M.

Partie A

1. La forme algébrique de l'affixe du point I′ image de I est donnée par $z_{I'} = \dfrac{z_I - 5}{z_I - 1} = \dfrac{3+i-5}{3+i-1} = \dfrac{-2+i}{2+i} = \dfrac{(-2+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{-3+4i}{5}$. I′ appartient à C si et seulement si $|z_{I'}| = 1$. Or $|z_{I'}| = \sqrt{\left(\dfrac{-3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9+16}{25}} = 1$.

2. a. Pour tout point M distinct de A et B, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est z'. Et $OM' = |z'| = \left|\dfrac{z-5}{z-1}\right| = \dfrac{|z-5|}{|z-1|} = \dfrac{MB}{MA}$.

b. Pour tout point M distinct de A et B, $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\dfrac{z'-0}{z_A-0}\right) = \arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-5}{z-1}\right) = (\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB})$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ). On cherche à construire géométriquement son image *M′*.

1. Si M est un point quelconque de (Δ) médiatrice de [AB], alors MA = MB, donc $OM' = \dfrac{MB}{MA} = 1$ et M′ appartient à (C).

2. On note (d) la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la tangente (T). (d) recoupe (C) en N.
a. On sait que AMB est isocèle en M; donc $(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BM})$ et $(\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \pi + 2(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB})$. OA et ON sont des rayons du cercle C, donc OAN est isocèle en O et $(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{NA} ; \overrightarrow{NO})$ et $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}) = \pi + 2(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AN})$. Les droites (AM) et (AN) sont symétriques par rapport à la tangente (T) parallèle à l'axe des ordonnées, et les points O, A et B sont alignés sur l'axe des abscisses, donc les angles $(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AN})$ et $(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB})$ sont égaux.
Ainsi, $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{ON}) = \pi + 2(\overrightarrow{AO} ; \overrightarrow{AN}) = \pi + 2(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB})$.
b. On sait que **p**our tout point M distinct de A et B, $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB})$ et que M' est sur le cercle C, donc M' = N. Une construction du point M′ : on trace la droite (AM), puis le point M_1 symétrique de M par rapport à (T), puis on trace la droite (AM_1); cette droite coupe le cercle en M' .

Exercice n°3 (élèves ayant choisi la spécialité mathématiques) *:*

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.
1. On vérifie que $11(-7) - 26(-3) = -77 + 78 = 1$, donc le couple $(-7 ; -3)$ est solution de (E).
Par soustraction, on obtient $11(x + 7) - 26(y + 3) = 0$, soit $11(x + 7) = 26(y + 3)$. Les nombres 11 et 26 sont premiers entre eux puisque 11 est premier et $26 = 2\times13$ n'est pas divisible par 11. Par le théorème de Gauss, 26 divise $x + 7$, donc il existe un entier k tel que $x + 7 = 26k$, soit $x = 26k - 7$. En remplaçant $x + 7$ par $26k$ dans $11(x + 7) = 26(y + 3)$, on obtient $y + 3 = 11k$, soit $y = 11k - 3$.
Vérification : pour tout entier relatif k, $11(26k - 7) - 26(11k - 3) = -77 + 78 = 1$.
Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(26k - 7; 11k - 3)$ où $k \in\mathbb{Z}$.
On en déduire le couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ solution de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$: il faut que $0 \leq 26k - 7 \leq 25$, soit $7 \leqslant 26k \leqslant 32$, soit $\frac{7}{26} \leqslant k \leqslant \frac{32}{26}$. La seule valeur de k correspondante est $k = 1$, soit $u = 19$ et $v = 8$.

Partie B

1. Codage de la lettre W : W correspond à 22, $11\times22 + 8 = 250 \equiv 16\ (26)$ car $250 = 26\times9 + 16$. Le nombre 16 correspond à la lettre Q. Donc W est codé par Q.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
a. On sait que $11\times19 = 209 = 26\times8 + 1$, donc pour tous nombres entiers relatifs x et j , $11x \equiv j\ (26)$ entraîne $11\times19x \equiv j\times19\ (26)$ équivaut à $x \equiv 19j\ (26)$. Réciproquement, $x \equiv 19j\ (26)$ entraîne $11x \equiv 11\times19j\ (26)$ équivaut à $11x \equiv j\ (26)$. Donc $11x \equiv j\ (26)$ équivaut à $x \equiv 19j\ (26)$.
b. Pour décoder une lettre correspondant au nombre $y \equiv 11x + 8\ (26)$, on multiplie cette relation par 19, on obtient $19y \equiv x + 19\times8 \equiv x + 152 \equiv x + 22\ (26)$, soit $x \equiv 19y - 22 \equiv 19y + 4\ (26)$. On calcule le reste de la division euclidienne de $19y + 4$ par 26, qui est le nombre x correspondant à la lettre décodée.
Décodage de la lettre W : W correspond à 22, $19\times22 + 4 = 422 \equiv 6\ (26)$. Le nombre 6 correspond à la lettre G. Donc W est décodé par G.

Exercice n°4 : Soit $v = (v_n)_{n>0}$ une suite. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{-v_n} + 1$.

Partie A

1. $v_0 = \ln a$, alors : $u_0 = e^{-\ln a} + 1 = \frac{1}{e^{\ln a}} + 1 = \frac{1}{a} + 1$.Réponse a
2. Si v est strictement croissante, alors : $-v$ est décroissante, e^{-v} est décroissante (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$) et $e^{-v} + 1$ l'est aussi et est minorée par 1 (au voisinage de $+\infty$). Réponse d.
3. Si v diverge vers $+\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-v_n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Réponse c.
4. Si v est majorée par 2, alors : $v_n \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -v_n$
$\Leftrightarrow e^{-2} \leq e^{-v_n}$ (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow e^{-2} + 1 \leq e^{-v_n} + 1$. Donc réponse b.

Partie B

Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a : $\ln(u_n) + v_n > 0$.

On a : $u_n = \frac{1}{e^{v_n}}+1=\frac{1+e^{v_n}}{e^{v_n}} > 0$ (car $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc en posant $x = v_n$ on obtient $e^{v_n} > 0$ et donc $e^{v_n} + 1 > 1$)
Donc $\ln(u_n) = \ln(1 + e^{v_n}) - \ln(e^{v_n}) = \ln(1 + e^{v_n}) - v_n \Leftrightarrow \ln(u_n) + v_n = \ln(1 + e^{v_n})$.
Or $e^{v_n} > 0$, donc $\ln(1 + e^{v_n}) > \ln 1 = 0$ (car la fonction logarithme népérien est croissante sur $\mathbb{R}^*_+$).
Autre méthode : quel que soit n, $1 + e^{-v_n} > e^{-v_n} > 0$.
Par croissance de la fonction ln, on a $\ln(u_n) = \ln(1 + e^{-v_n}) > \ln(e^{-v_n}) = -v_n$; conclusion : $\ln(u_n) + v_n > 0$.