<u>EXERCICE 1</u> : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

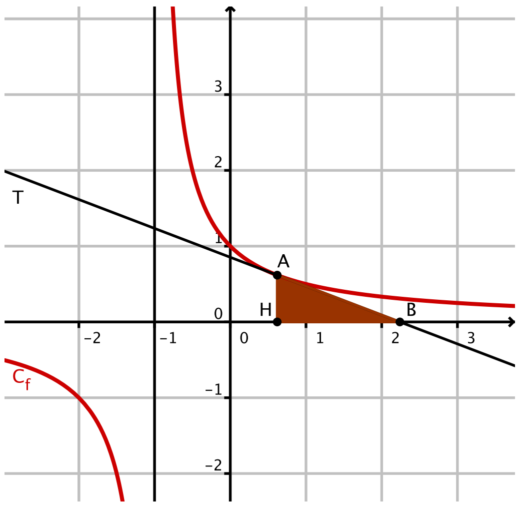
1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$; On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$;
On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x+1) = 0^+$; On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(x+1) = 0^-$;

2. Pour étudier les variations de f, on détermine la fonction dérivée : cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.

3. a) Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point A d'abscisse a différent de -1 est de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \dfrac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{-(x-a)+a+1}{(a+1)^2} = \dfrac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$.

b) L''abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses vérifie les deux équations
$y = 0$ et $y = \dfrac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$; soit $-x + 2a + 1 = 0$, d'où $x = 2a + 1$.
Donc B$(2a + 1;\, 0)$.

c) Si H le projeté orthogonal de A$(a; f(a))$ sur l'axe des abscisses, alors H$(a; 0)$.
Le triangle AHB est rectangle en H, donc l'aire du triangle
AHB $= \dfrac{\text{HA}\times\text{HB}}{2} = \dfrac{|f(a)|\times|2a+1-a|}{2} = \dfrac{|1/(a+1)|\times|a+1|}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Cette aire est invariante pour tout réel a de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.



<u>EXERCICE 2</u> : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$; on obtient une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, on utilise la quantité conjuguée: on multiplie et on divise $f(x)$ par $\sqrt{x^2+1} + x$:
on obtient $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour étudier les variations de f, on détermine la fonction dérivée : cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Le signe de cette dérivée dépend du signe du numérateur : $x - \sqrt{x^2+1}$. Or, pour tout réel x , $x^2 < x^2 + 1$, donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ puisque la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. Donc $|x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, et la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

4. Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C, ici en $-\infty$, il faut montrer que la limite $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x)) = 0$.

Or $f(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

On a vu précédemment que $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$, et la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5.Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x + 1$.

6. a) Les polynômes P du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0 vérifient $P(0) = f(0) = 1$ et $P'(0) = f'(0) = -1$.
Un polynôme du second degré est de la forme $ax^2 + bx + c$. Donc $P(0) = c = 1$ et $P'(x) = 2ax + b$,
soit $P'(0) = b = -1$. Donc $P(x) = ax^2 - x + 1$.

b) Parmi ces polynômes, l'un passe par le point A de coordonnées (2; 1) si $P(2) = 1$,
soit $P(x) = 4a - 2 + 1 = 4a - 1 = 1$, soit $a = \dfrac{1}{2}$.

7. Représentation graphique de la courbe C, la tangente T, la droite (d), le polynôme de la question 6. b).