

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

La suite (v_n) est définie par $v_n = u_n + 3$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
3. En déduire les variations et la limite de la suite (u_n) .

4. On définit la suite (s_n) par $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

- a) Exprimer s_n en fonction de n .
- b) Etudier la convergence de la suite (s_n) .

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
2. Etudier les variations de la suite (u_n) .
3. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n) , et conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
4. Démontrer cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.
5. Etudier la convergence de la suite (u_n) .