EXERCICE 1 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1. On a $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{2}{3}u_n - 1 + 3 = \frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}(u_n + 3) = \frac{2}{3}v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, et de premier terme $v_0 = u_0 + 3 = -2 + 3 = 1$.

2. Donc, pour tout entier naturel n, $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = v_n - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 3 - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3} - 1\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{-1}{3}$ qui est strictement négatif, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et $u_{n+1} < u_n$. Ainsi la suite (u_n) est strictement décroissante.

Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$.

4. a) On a $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = -2 + \frac{2}{3} - 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 = -2 + \sum\limits_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3n =$

$-2 - 3n + \frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = -2 - 3n + 2\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = -3n - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-3n) = -\infty$, donc par somme de limites , $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$.

EXERCICE 2 : 1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$:
Initialisation : pour $n = 0$: $u_0 = 1 > 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n, $u_n > 0$ et on montre que $u_{n+1} > 0$:

$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ avec $u_n > 0$ et $\sqrt{u_n^2+1} > 0$, donc $u_{n+1} > 0$. Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2. Pour tout entier naturel n, comme pour tout entier naturel n, $u_n > 0$; on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\times\frac{1}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}}$. Or, pour tout entier naturel n, $u_n^2+1 > 1$, d'où $\sqrt{u_n^2+1} > 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}} < 1$,

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $u_{n+1} < u_n$; ainsi la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Calcul des cinq premiers termes de la suite (u_n) :

$u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $u_2 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $u_3 = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ et $u_4 = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

On conjecture que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

4. On démontre cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence :

Initialisation : pour $n = 0$: $u_0 = 1 = \frac{1}{\sqrt{0+1}}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et on montre que $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$:

$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$. Conclusion : Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$; donc la suite (u_n) converge vers 0.