DEVOIR MAISON N° 3 TERMINALE S Octobre 2008

## EXERCICE 1

On considère la fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$.

1. Déterminer les dérivées $f'$, $f''$ et $f'''$ de la fonction $f$.
2. Déterminer le signe de la fonction $f$ en étudiant successivement les variations des fonctions $f'$ et $f''$.
3. En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
4. Quel encadrement peut-on en déduire pour $x \leqslant 0$ ?
5. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

a) La fonction $g$ est-elle continue en 0 ?
b) La fonction $g$ est-elle dérivable en 0 ?

## EXERCICE 2

On considère la fonction $f$ définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x-1}}$.

Etudier la dérivabilité de $f$ en 2 puis en 1.

## EXERCICE 3

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

1. a) A l'aide d'un logiciel, déterminer les quatorze premiers termes de la suite $(u_n)$.
b) Conjecturer la limite de cette suite.
c) On reprend la même définition de la suite $(u_n)$ mais en prenant $u_0 = u_1 = n$. Que se passe-t-il ?
2. Dans le cas général, conjecturer une relation entre la limite $l$ de la suite et les deux premiers termes $u_0$ et $u_1$, de la forme $l = au_0 + bu_1$, où $a$ et $b$ sont deux réels à déterminer.
3. On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$.
a) Déterminer les quatorze premiers termes de la suite $(v_n)$.
b) Quelle semble être la nature de la suite $(v_n)$ ?
c) Démontrer ce dernier résultat.