EXERCICE 1 : On considère la fonction $f$ définie sur [0; +∞ [ par $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.

1. La fonction $f$ est dérivable sur ℝ comme somme de fonctions qui le sont.
Et $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ ; $f''(x) = -\sin x + x$; $f'''(x) = -\cos x + 1$.

2. On sait que pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc $f'''(x) \geqslant 0$, et la fonction $f''$ est strictement croissante sur ℝ.
On a $f''(0) = 0$, donc $f''(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty ; 0]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $[0; +\infty[$.
Donc la fonction $f'$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet donc un minimum global en $x = 0$ qui vaut $f'(0) = 0$; donc $f'(x) \geqslant 0$, et la fonction $f$ est strictement croissante sur ℝ.
On a $f(0) = 0$, donc $f(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty ; 0]$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[0; +\infty[$.

3. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geqslant 0$, soit $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x$. On a vu que $f''(x) = -\sin x + x \geqslant 0$ sur $[0; +\infty[$, donc $\sin x \leqslant x$. Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

4. Pour tout réel $x \leqslant 0$, on obtient de la même façon l'encadrement $x \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6}$.

5. On considère la fonction $g$ définie sur ℝ par $g(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

a) On sait que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ = nombre dérivé de la fonction sinus en 0 = cos(0) = 1 = $g(0)$, donc la fonction $g$ est continue en 0.

b) Le taux d'accroissement de $g$ en 0 est $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$. En utilisant la question 3, pour tout réel $x > 0$, $-\frac{x^3}{6} \leqslant \sin x - x \leqslant 0$ et $-\frac{x}{6} \leqslant \frac{\sin x - x}{x^2} \leqslant 0$. Comme $\lim_{x\to 0} \frac{x}{6} = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$. De même, pour tout réel $x < 0$, $0 \leqslant \sin x - x \leqslant -\frac{x^3}{6}$ et $0 \leqslant \frac{\sin x - x}{x^2} \leqslant -\frac{x}{6}$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$. Donc la fonction $g$ est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction $f$ définie sur [1; +∞ [ par $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}$.

La fonction $f$ est le quotient et la composée de fonctions dérivables sur ]1; +∞[ , car la fonction racine carrée est dérivable sur ]0; +∞[. Donc $f$ est dérivable en 2.

On détermine la dérivée de $f$ sur ]1; +∞[, de la forme $\frac{u}{v}$ : $f'(x) = \frac{1+\sqrt{x-1} - x \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{(1+\sqrt{x-1})^2} = \frac{2\sqrt{x-1}+2(x-1)-x}{2\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})^2} = \frac{2\sqrt{x-1}+x-2}{2\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})^2}$. Et $f'(2) = \frac{2\sqrt{2-1}+2-2}{2\sqrt{2-1}(1+\sqrt{2-1})^2} = \frac{2}{2\times 4} = \frac{1}{4}$.

Pour étudier la dérivabilité de $f$ en 1, on détermine le taux d'accroissement de $f$ en 1 qui est
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}-1}{x-1} = \frac{x-1-\sqrt{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x-1})^2-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2(1+\sqrt{x-1})}$. On factorise par $\sqrt{x-1}$ :

Ainsi, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-1)}{(\sqrt{x-1})^2(1+\sqrt{x-1})} = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})}$. On a $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x-1}-1) = -1$,
et $\lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x-1}) = 1$, donc $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1}) = 0^+$ ; donc $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

Donc la fonction $f$ n'est pas dérivable en 1.

EXERCICE 3

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$ .

| $n$ | $u_n$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 4 |
| 2 | 3 |
| 3 | 3,5 |
| 4 | 3,25 |
| 5 | 3,3750000 |
| 6 | 3,3125000 |
| 7 | 3,3437500 |
| 8 | 3,3281250 |
| 9 | 3,3359375 |
| 10 | 3,3320313 |
| 11 | 3,3339844 |
| 12 | 3,3330078 |
| 13 | 3,3334961 |
| 14 | 3,3332520 |

1. a) A l'aide du tableur, voici les quatorze premiers termes de la suite $(u_n)$ :

b) On conjecture que la limite de cette suite est $\dfrac{10}{3}$ .

c) Si $u_0 = u_1 = c$ , alors $u_2 = \dfrac{u_0 + u_1}{2} = c$ et la suite $(u_n)$ est constante égale à $c$.

2. Dans le premier exemple, on obtient $l = \dfrac{10}{3}$ , soit $2a + 4b = \dfrac{10}{3}$ , et dans le deuxième exemple, $ac + bc = c$ , soit $a + b = 1$. On résout le système $\begin{cases} 2a+4b=\dfrac{10}{3} \\ a+b=1 \end{cases}$ et on trouve $\begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Ainsi, on conjecture que $l = \dfrac{1}{3} u_0 + \dfrac{2}{3} u_1$ .

3. On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

a) Les quatorze premiers termes de la suite $(v_n)$ ci-contre :

| $n$ | $v_n$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | -1 |
| 2 | 0,5 |
| 3 | -0,25 |
| 4 | 0,125 |
| 5 | -0,0625 |
| 6 | 0,03125 |
| 7 | -0,015625 |
| 8 | 0,0078125 |
| 9 | -0,0039063 |
| 10 | 0,0019531 |
| 11 | -0,0009766 |
| 12 | 0,0004883 |
| 13 | -0,0002441 |
| 14 | -3,3332520 |

b) La suite $(v_n)$ semble être géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$ , donc convergente vers 0 et non monotone.

c) On démontre que la suite $(v_n)$ est géométrique : Pour tout entier naturel $n$,

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2} - u_{n+1} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{2} = \dfrac{-(u_{n+1} - u_n)}{2} = \dfrac{-1}{2} v_n$ .

Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0$ .

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $v_n = v_0 \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n = (u_1 - u_0)\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$ .

On peut alors écrire, pour tout entier naturel $n$ non nul, $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$ ,

soit $u_n = v_{n-1} + u_{n-1} = v_{n-1} + v_{n-2} + u_{n-2} = \ldots = v_{n-1} + v_{n-2} + \ldots + v_0 + u_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} v_k + u_0$ ,

soit $u_n = (u_1 - u_0) \dfrac{1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{-1}{2}} + u_0 = (u_1 - u_0)\dfrac{2}{3}\left(1-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right) + u_0$ .

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n = 0$ car la raison de la suite est strictement comprise entre – 1 et 1,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = (u_1 - u_0)\dfrac{2}{3} + u_0 = \dfrac{1}{3} u_0 + \dfrac{2}{3} u_1$ . On retrouve le résultat de la question 2.