DEVOIR MAISON N° 4 TERMINALE S Novembre 2008

EXERCICE 1

A. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Démontrer que la suite est croissante.
3. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

En sommant ces inégalités membre à membre pour $2 \leqslant k \leqslant n$, montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.

4. Justifier que la suite (u_n) converge.

Euler a démontré en 1748 que cette suite converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

B. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n + \frac{1}{n+1}$ et $w_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Préciser les limites des suites (v_n) et (w_n).
2. a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$.

b) En déduire le sens de variations de la suite (v_n).

3. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
4. En déduire que $v_n \leqslant \frac{\pi^2}{6} \leqslant w_n$.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 \leqslant w_n - v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.
6. En déduire un entier p tel que pour $n \geqslant p$, l'encadrement $v_n \leqslant \frac{\pi^2}{6} \leqslant w_n$ soit inférieur à 10^{-2}.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\left] \frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ par $f(x) = \tan x$.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2x$.
4. Donner des valeurs approchées à 10^{-3} près des solutions.